На правах рукописи

Кошкин Евгений Вячеславович

СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ АРГУМЕНТАМИ

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2015

Работа выполнена на кафедре механики и математического моделирования Института математики и компьютерных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина”.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Долгий Юрий Филиппович.

Официальные оппоненты:
Кипнис Михаил Мордкович, доктор физ.-мат. наук, профессор, ФГБОУ ВПО “Челябинский государственный педагогический университет”, профессор кафедры математики и методики обучения математике,

Розенберг Валерий Львович, кандидат физ.-мат. наук, доцент, ФГУБН “Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского” Уральского отделения Российской академии наук, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений.

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО “Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина”.

Защита состоится “24” июня 2015 года в 14^{00} час. на заседании диссертационного совета Д 212.285.25 на базе ФГАОУ ВПО “Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина” по адресу: 620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина 51, зал заседаний диссертационных советов, комн. 248).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВПО “Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина”, http://dissovet.science.urfu.ru/news2/.

Автореферат разослан “___” __________ 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, доктор физико-математических наук, профессор Пименов В.Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень ее разработанности. Интерес к дифференциальным уравнениям с кусочно-постоянными аргументами обусловливается большим числом задач математического моделирования, возникающих в различных областях естествознания, а также при решении технических задач. Дифференциальные уравнения с кусочно-постоянными аргументами удобно использовать при математическом описании систем автоматического регулирования, которые содержат непрерывные подсистемы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, и импульсные подсистемы, описываемые разностными уравнениями. Рассматриваемые уравнения используются при описании математических моделей популяционной динамики. Имеются математические модели, описывающие функционирование экономических систем.

Изучаемые в настоящей работе уравнения принадлежат классу функционально-дифференциальных уравнений, основные положения теории которых изложены в монографиях Н.В. Азбелева, В.П. Максимова и Л.Ф. Рахматуллиной, Р. Беллмана и К.Л. Кука, В.Б. Колмановского и В.Р. Носова, Н.Н. Красовского, А.Д. Мышкиса, Дж. Хейла, Л.Э. Эльсгольца и С.Б. Норкина.

Развитию качественной теории дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами посвящены работы M.U. Akmet и C. Büyükadli, A. Cabada и J.B. Ferreiro, K.L. Cooke, I. Gyori, J. Turi, G. Turner, J. Wiener, G. Seifert, Wang Li, Yuan Rong и Zhang Chuan Yi, A. Alonso, J. Hong и J. Rojo, S. George, Y. Rong, M. Yoshiaki. Задачи устойчивости решений дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами изучались в работах K.L. Cooke и J.M. Ferreira[1], K. Golpalsamy и P. Liu[2], R.M. May.

В работах Н.Н. Красовского, посвященных проблеме аналитического конструирования оптимальных регуляторов для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, показано, что при ее решении удобно использовать функциональное пространство состояний[3]. Н.Н. Красовский определил достаточные условия существования оптимального стабилизирующего управления. Ю.С. Осипов установил их связь с вполне управля-

[1] *Cooke K.L., Ferreira J.M.* Stability conditions for linear retarded functional differential equations // J. Math. Anal. and Appl. 1983. V. 96, № 2. P. 480–504

[2] *Liu P., Golpalsamy K.* Global stability and chaos in a population model with piecewise constant arguments // Appl. Math. and Comput. 1999. V. 101, № 1. P. 63–88

[3] *Красовский Н.Н.* Об аналитическом конструировании регулятора в системе с запаздыванием времени // ПММ. 1962. Т. 26, вып. 3. С. 39–51

емостью специальной конечномерной системой[4].

Задача нахождения оптимального стабилизирующего управления для общего класса систем дифференциальных уравнений с последействием и общего множества допустимых управлений является достаточно сложной. Поэтому развивались приближенные методы решения этой задачи. В работах Дж. Хейла, С.Н. Шиманова, Н.Н. Красовского, M.C. Delfour предложены схемы аппроксимации систем дифференциальных уравнений с последействием. Их приложению к задаче оптимальной стабилизации систем с запаздыванием посвящены работы Н.Н. Красовского, Ю.С. Осипова, Е.М. Маркушина, М.Н. Шабалина и С.Н. Шиманова, M.C. Delfour, J.S. Gibson.

В классе дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами проблема оптимальной стабилизации решений специально не изучалась.

Цели и задачи диссертационной работы. Цель работы состоит в решении задач оптимальной стабилизации для периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами и их конечномерных расширений, в использовании этих систем в качестве приближений при решении задачи оптимальной стабилизации для периодических линейных систем дифференциальных уравнений с последействием общего вида, а также в разработке конструктивных методов нахождения стабилизирующих управлений, алгоритмов и реализации их в форме компьютерных программ.

Научная новизна. Важным свойством систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами является конечномерность пространства их решений. Для сохранения этой конечномерности в данной работе рассматривается множество допустимых управлений, состоящее из кусочно-постоянных функций. Бесконечномерность пространства состояний создает большие трудности при решении задачи оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последействием. В то же время в классе дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами возможен прогресс в решении проблемы оптимальной стабилизации. Здесь можно успешно использовать общие подходы теории оптимальной стабилизации для обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с последействием и разностных уравнений с дискретным временем. В предлагаемой работе установлена связь зада-

[4] *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618

чи оптимальной стабилизации периодической системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами с задачей оптимальной стабилизации автономной системы разностных уравнений с дискретным временем. Этот результат справедлив для линейных и нелинейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами.

В настоящей работе предложено расширение класса периодических линейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами. В основу этого расширения положено представление конечномерного вольтеррового по Тихонову оператора. Этот оператор задает правую часть дифференциального уравнения, пространство решений которого конечномерно. Предложенные системы дифференциальных уравнений с последействием называются системами дифференциальных уравнений с конечномерными операторами. Впервые такие системы рассмотрены в работах Ю.Ф. Долгого и В.С. Тарасяна[5,6]. В предлагаемой работе установлена связь задачи оптимальной стабилизации таких систем с задачей оптимальной стабилизации автономных систем разностных уравнений с дискретным временем.

Системы дифференциальных уравнений с конечномерными операторами используются в данной работе при построении конечномерных аппроксимаций для периодических линейных систем дифференциальных уравнений с последействием общего вида. Предложено несколько схем аппроксимаций и обоснована сходимость порождаемых ими приближений. Для аппроксимирующих систем разработаны процедуры нахождения стабилизирующих управлений.

Предложенные в работе методы построения стабилизирующих управлений конструктивны, положены в основу вычислительных алгоритмов и реализованы в форме компьютерных программ в программном комплексе PCAStab для Wolfram Mathematica 8.

Теоретическая и практическая значимость работы. Системы дифференциальных уравнений с последействием играют важную роль при описании различных процессов и явлений в науке и технике. В работе получены результаты, имеющие теоретическую ценность для теории оптимальной стабилизации решений периодических систем дифференциальных уравнений с последействием. С другой стороны, полученные в работе ре-

---

[5] *Долгий Ю.Ф., Тарасян В.С.* Конечномерные операторы монодромии для периодических систем дифференциальных уравнений с последействием // Изв. Урал. гос. ун-та. 2000. № 18 (Математика и механика. Вып. 3). С. 67–83

[6] *Тарасян В.С.* Периодические системы дифференциальных уравнений с конечномерными операторами // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2002. № 4. С. 67–91

зультаты могут иметь и практическую ценность. Они могут быть использованы при стабилизации динамических процессов в популяционных и экономических системах, а также в системах автоматического регулирования.

Методология и методы исследования. В основе исследований лежат понятия и методы теории дифференциальных уравнений, разностных уравнений, теории оптимальной стабилизации, теории функций и функционального анализа, численных методов анализа.

Положения, выносимые на защиту. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

- обосновано сведение задач оптимальной стабилизации периодических систем с кусочно-постоянными аргументами и их расширений к задачам оптимальной стабилизации автономных систем разностных уравнений с дискретным временем;
- предложены и обоснованы конечномерные аппроксимации для периодической линейной системы дифференциальных уравнений с последействием общего вида;
- найдено общее представление конечномерного линейного вольтеррового по Тихонову оператора;
- предложены и обоснованы численные процедуры нахождения оптимального стабилизирующего управления;
- разработан комплекс программных средств для численного нахождения оптимального стабилизирующего управления, в котором реализованы предложенные в работе численные методы и алгоритмы, а также выполнена визуализация результатов расчетов, работа программного комплекса апробирована на популяционных моделях.

Достоверность результатов. Достоверность полученных в работе результатов подтверждается соответствующими математическими доказательствами, результатами компьютерного моделирования, использованием общепризнанных апробированных методов вычислений и согласованностью результатов, полученных различными способами.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы из 114 наименований, содержит 35 рисунков. Общий объем работы составляет 120 страниц машинописного текста.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на следующих научных мероприятиях:

1. 38, 39, 40, 41, 42-й региональных молодежных конференциях “Проблемы теоретической и прикладной математики” (Екатеринбург, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011 гг.);

2. XI Международной конференции “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” (Конференции Пятницкого) (Москва, 2010 г.);

3. II Международной школе-семинаре “Нелинейный анализ и экстремальные задачи” (Иркутск, 2010 г.);

4. Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2011 г.);

5. X Международная Четаевская конференция “Аналитическая механика, устойчивость и управление” (Казань, 2012 г.).

6. II Международный семинар, посвященный 70-летию со дня рождения академика А.И. Субботина, “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби” (Екатеринбург, 2015 г.).

Публикации. По результатам диссертации лично автором и в соавторстве с научным руководителем опубликованы 17 работ: 5 работ в российских рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК [1–5]; 11 работ в других журналах и материалах всероссийских и международных конференций [7–18]; одно свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ в Роспатенте [6].

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается общая характеристика работы, приводятся формулировки и описания основных утверждений диссертации, сведения о литературе, относящейся к истории рассматриваемого вопроса.

В **первой главе** исследуется задача построения стабилизирующих управлений для систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами. В параграфах §§1.1 — 1.4 рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{dx(t)}{dt} = A^o(t)x(t) + \sum_{k=0}^{l} A_k(t)x([t-k]) + B(t)u,\ t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty), \qquad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, $A^o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $A_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times m}$, $k = 0, ..., l$ — непрерывные 1-периодические функции, $B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times r}$ — непрерывная 1-периодическая функция, $[a]$ – целая часть числа a.

Множество допустимых управлений U задается кусочно-постоянными функциями $u(t) = u_n$, $n \leq t < n+1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, в которых значения управления формируются по принципу обратной связи.

Ставится задача нахождения управления u^0 в множестве допустимых управлений U, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1) и минимизирует следующий критерий качества переходных процессов

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \left(x^T(t) D_x(t) x(t) + u^T(t) D_u(t) u(t) \right) dt. \tag{2}$$

Здесь $D_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times m}$ и $D_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m\times r}$ — непрерывные 1-периодические функции, значения $D_x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, являются неотрицательными матрицами, значения $D_u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — положительно определенными матрицами.

Теорема 1. *Пусть A^o, A^k, $k = 0, \ldots, l$, B — непрерывные 1-периодические функции. Задача оптимальной стабилизации в множестве допустимых управлений U для системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами* (1) *и критерия качества процесса управления* (2) *эквивалентна задаче оптимальной стабилизации системы разностных уравнений*

$$y_{n+1} = \mathcal{A} y_n + \mathcal{B} u_n, \tag{3}$$

где $y_n \in \mathbb{R}^{m(l+1)}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — постоянные матрицы размерностей $m(l+1) \times m(l+1)$ и $m(l+1) \times r$ соответственно, с дискретным критерием качества процесса управления

$$\mathcal{J} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(y_n^T \mathcal{D}_y y_n + y_n^T \mathcal{D}_{yu} u_n + u_n^T \mathcal{D}_{yu}^T y_n + u_n^T \mathcal{D}_u u_n \right), \tag{4}$$

где $\mathcal{D}_y$, $\mathcal{D}_{yu}$, $\mathcal{D}_u$ — постоянные матрицы размерностей $m(l+1) \times m(l+1)$, $m(l+1) \times r$ и $r \times r$ соответственно. Здесь матричные коэффициенты $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}_y$, $\mathcal{D}_{yu}$, $\mathcal{D}_u$ аналитически определяются через матричные функции $A^o(t)$, $A_k(t)$, $k = 0, ..., l$, $B(t)$, $D_x(t)$, $D_u(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Достаточные условия, обеспечивающие существование единственного решения задачи оптимальной стабилизации (3), (4) имеют вид

$$(A)\qquad \begin{array}{l}\text{пара матриц } \tilde{\mathcal{A}} \text{ и } \mathcal{B} \text{ управляема,}\\ \text{пара матриц } \tilde{\mathcal{D}}_1 \text{ и } \tilde{\mathcal{A}} \text{ идентифицируема.}\end{array}$$

Здесь $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{D}_{yu}^T$, $\tilde{\mathcal{D}}_y = \mathcal{D}_y - \mathcal{D}_{yu}\mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{D}_{yu}^T$, $\tilde{\mathcal{D}}_1$ — произвольная матрица, удовлетворяющая свойству $\tilde{\mathcal{D}}_1^T\tilde{\mathcal{D}}_1 = \tilde{\mathcal{D}}_y$.

Проблема решения задач оптимальной стабилизации (3), (4) при выполнении условий (А), связана с поиском положительно определенного решения нелинейного алгебраического уравнения Риккати

$$\mathcal{A}^T P\mathcal{A} - P + \mathcal{D}_y - \left(\mathcal{A}^T P\mathcal{B} + \mathcal{D}_{yu}\right)\left[\mathcal{B}^T P\mathcal{B} + \mathcal{D}_u\right]^{-1}\left(\mathcal{B}^T P\mathcal{A} + \mathcal{D}_{yu}^T\right) = 0. \quad (5)$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и условия* (A). *Тогда в множестве допустимых управлений* U *задача оптимальной стабилизации нулевого решения системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами* (1) *и критерием качества* (2) *имеет единственное решение, определяемое формулой*

$$u^0\left(t, x(\cdot)\right) = \sum_{j=0}^{l} K_j x\left([t-k]\right),\ t \in \bar{\mathbb{R}}^+. \quad (6)$$

Здесь $K = \{K_j\}_{j=0}^l$, $K = -\left[\mathcal{B}^T P\mathcal{B} + \mathcal{D}_u\right]^{-1}\left(\mathcal{B}^T P\mathcal{A} + \mathcal{D}_{yu}^T\right)$, P *— положительно определенное решение уравнения* (5). *Значение показателя качества* (2) *для решения системы* (1), *определяемого начальным вектором* $y_0 = \left(x^T(0), x^T(-1), \ldots, x^T(-l)\right)^T$ *и оптимальным стабилизирующим управлением* (6), *определяется формулой*

$$J^0 = y_0^T P y_0.$$

§§ 1.2 – 1.4 посвящены развитию методов нахождения стабилизирующих управлений в задаче (1), (2).

В разделе 1.2.1 параграфа 1.2 предложена процедура численного решения уравнения Риккати (5), использующая универсальный метод Ньютона. При решении задачи оптимальной стабилизации (1), (2) метод Ньютона модифицируется путем учета структуры матричных коэффициентов эквивалентной задачи (3), (4), что позволяет существенно понизить порядок нелинейной алгебраической системы, определяющей решение уравнения Риккати.

В разделе 1.2.2 параграфа 1.2 рассмотрен специальный численный метод решения дискретного уравнения Риккати (5), основанный на процедуре QR-разложения матрицы[7,8]

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} + \mathcal{F}\tilde{\mathcal{A}}^{-T}\tilde{\mathcal{D}}_y & -\mathcal{F}\tilde{\mathcal{A}}^{-T} \\ -\tilde{\mathcal{A}}^{-T}\tilde{\mathcal{D}}_y & \tilde{\mathcal{A}}^{-T} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{F} = \mathcal{B}\mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{B}^T$. Применением QR-разложения матрица $\mathcal{M}$ приводится к верхней форме Шура R. Переупорядочением формы Шура R необходимо перейти к другой форме $\tilde{R}$, содержащей в верхних $m(l+1)$ позициях главной диагонали устойчивые собственные значения. Пусть Q - унитарная матрица, трансформирующая $\mathcal{M}$ к форме R, а V - произведение унитарных преобразований, использованных при переупорядочении. Пусть матрица $U = QV$ имеет блочную структуру

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix},$$

каждый блок которой имеет размерность $m(l+1) \times m(l+1)$. Тогда искомая матрица P — решение дискретного уравнения Риккати определяется формулой

$$P = U_{21}U_{11}^{-1}.$$

В §1.3 рассматривается метод продолжения по параметру[3] для решения задачи оптимальной стабилизации (1), (2). Следуя данному методу, для задачи (3), (4) ставится вспомогательная задача оптимальной стабилизации разностного уравнения

$$y_{n+1} = \left(\mu\tilde{\mathcal{A}} + (1-\mu)I_{m(l+1)}\right) y_n + \mu\mathcal{B}\tilde{u}_n + (1-\mu)v_n, \tag{7}$$

с критерием качества

$$J_\mu = \sum_{n=0}^{+\infty}\left((1-\mu)\left(y_n^T y_n + v_n^T v_n\right) + \mu\left(y_n^T\tilde{\mathcal{D}}_y y_n + \tilde{u}_n^T\mathcal{D}_u\tilde{u}_n\right)\right), \ n \geq 0, \ \mu \in [0,1]. \tag{8}$$

Здесь $v_n \in \mathbb{R}^{m(l+1)}$ — вспомогательное управление.

Решение вспомогательной задачи осуществляется вторым методом Ляпунова[9]. Функция Ляпунова выбирается в виде $V(y_n,\mu) = y_n^T P(\mu) y_n$,

[7] *Laub A.J.* A Schur method for solving algebraic riccati equations // IEEE Trans. on Autom. Control. 1979. V. 24. P. 913–921

[8] *Икрамов Х.Д.* Численное решение матричных уравнений. М.: Наука. 1984

[9] *Кунцевич В.М., Лычак М.Н.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977

$n \geq 0,\ P(\mu) = P^T(\mu) > 0,\ \mu \in [0,1]$. Применение второго метода Ляпунова позволяет свести вспомогательную задачу оптимальной стабилизации (7), (8) к решению уравнения

$$F\left(\mu, P(\mu)\right) = \hat{A}^T(\mu)P(\mu)\hat{A}(\mu) - P(\mu) + \hat{D}_y(\mu) -$$

$$-\hat{A}^T(\mu)P(\mu)\hat{B}(\mu)\left(P(\mu)\hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)}\right)^{-1} P(\mu)\hat{A}(\mu) = 0. \qquad (9)$$

в котором $\hat{A}(\mu) = \mu\tilde{\mathcal{A}} + (1-\mu)I_{m(l+1)}$, $\hat{B}(\mu) = \mu\tilde{\mathcal{B}} + (1-\mu)I_{m(l+1)}$, где $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}\mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{B}^T$, $\hat{D}_y(\mu) = \mu\tilde{\mathcal{D}}_y + (1-\mu)I_{m(l+1)}$.

Теорема 3. *Оптимальное управление вспомогательной задачи* (7), (8) *при* $\mu \in (0,1]$ *определяется формулой*

$$\tilde{u}_n^0\left(\mu, y_n\right) = -\mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{B}^T K(\mu) y_n,\ n \geq 0,$$

где $K(\mu) = \left(P(\mu)\hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)}\right)^{-1} P(\mu)\hat{A}(\mu)$, *матрица* $P(\mu)$, $\mu \in (0,1]$, *удовлетворяет матричному уравнению* (9). *При этом оптимальному управлению в задаче* (3), (4) *будет соответствовать управление* $u_n^0\left(y_n\right) = \tilde{u}_n^0\left(1, y_n\right) - D_u^{-1}D_{yu}^T y_n$.

Для решения уравнения (9) предлагается использовать подход, изложенный в работе Д.Ф. Давиденко[10], в соответствии с которым уравнение (9) на интервале $(0,1)$ заменяется задачей Коши для дифференциального уравнения с начальным условием $P(0) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} I_{m(l+1)}$. Обыкновенное дифференциальное уравнение в задаче Коши, описывается формулой

$$F'_\mu\left(\mu, P(\mu)\right) + F'_P\left(\mu, P(\mu)\right)\left(P'(\mu)\right) = 0,$$

где $F'_\mu\left(\mu, P(\mu)\right)$ — производная матричной функции F по параметру μ при фиксированном значении P, $F'_P\left(\mu, P(\mu)\right)(X)$ — значение производной Фреше по матричному элементу P на матричном элементе X. Решение задачи Коши предлагается осуществлять численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка на некотором равномерном разбиении отрезка $[0,1]$.

Процедуру нахождения стабилизирующего управления можно упростить, если заменить задачу нахождения матрицы $P(\mu)$, $\mu \in [0,1]$, задачей нахождения матрицы $K(\mu)$, $\mu \in [0,1]$.

[10] *Давиденко Д.Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 4. С. 601-602

В §1.4 для случая скалярного управления u предлагается процедура построения оптимального управления методом факторизации характеристического уравнения[11,12].

В § 1.5 рассмотрена задача оптимальной стабилизации решений нелинейной системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{dx(t)}{dt} = F\left(t, x(t), x([t]), x([t-1]), ..., x([t-l]), u\right) \tag{10}$$

с критерием качества переходных процессов

$$J = \int\limits_{0}^{+\infty} \omega(t, x(t), u(t))dt. \tag{11}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, множество допустимых управлений, формируемых по принципу обратной связи, U по-прежнему состоит из кусочно-постоянных функций и выполнены условия

$$(B)\quad \begin{array}{l} F \text{ — непрерывная вектор-функция в некоторой области } \mathbb{R}\times D; \\ \text{голоморфная по всем аргументам, кроме первого, в области } D; \\ \text{периодическая по первому аргументу, с периодом } 1; \\ F(t,0,...,0)=0,\ t\in\mathbb{R}. \end{array}$$

$$(C)\quad \begin{array}{l} \omega \text{ — неотрицательная функция, непрерывная в некоторой} \\ \text{области } \mathbb{R}\times D'\text{; положительно определенная, голоморфная} \\ \text{по } x \text{ и } u \text{ в области } D'\text{; периодическая по первому аргументу,} \\ \text{с периодом } 1;\ \omega(t,0,0)=0,\ t\in\mathbb{R}. \end{array}$$

где D и D' — области пространств $\mathbb{R}^{m(l+1)+r}$ и $\mathbb{R}^{m+r}$, соответственно, содержащие точки с нулевыми координатами.

Задачи оптимальной стабилизации для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений решались в работах Э.Г. Альбрехта[13], Е.А. Гальперина и Н.Н. Красовского[14], для систем с постоянным запаздыванием — в работе Zhang Yuanliang и Chong Kil To[15], а для систем разност-

[11] *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977

[12] *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов // АиТ. 1960. № 4. С. 436–441

[13] *Альбрехт Э.Г.* Об оптимальной стабилизации нелинейных систем // ПММ. 1961. Т. 25, вып. 5. С. 836–844

[14] *Гальперин Е.А., Красовский Н.Н.* О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем // ПММ. 1963. Т. 27, вып. 6. С. 988–1004

[15] *Zhang Yuanliang, Chong Kil To.* Time-discretization of nonlinear control systems with State-delay via Taylor-Lie series // Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl. 2009. V. 70, № 1. C. 83–98

ных уравнений — в работе Ю.Н. Седова[16].

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (B) *и* (C). *Тогда задача оптимальной стабилизации в множестве допустимых управлений* U *системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами* (10) *и с критерием качества процесса управления* (10) *эквивалентна задаче оптимальной стабилизации системы дискретных уравнений*

$$y_{n+1} = f(y_n, u_n), \tag{12}$$

с критерием качества процесса управления

$$\tilde{J} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{\omega}(y_n, u_n). \tag{13}$$

Здесь $y_n \in \mathbb{R}^{m(l+1)}$, $n \geq 0$, *вектор-функция* f *и скалярная функция* $\tilde{\omega}$ *аналитически определяются через вектор-функцию* F *и скалярную функцию* ω.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (A), (B), (C). *Тогда в множестве допустимых управлений* U *задача оптимальной стабилизации нулевого решения системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами* (10) *и критерием качества* (11) *определяется асимптотической формулой*

$$u^0\left(t, x(\cdot)\right) = \sum_{k=1}^{N} u^k\left(x([t]), \ldots, x([t-l])\right) + O\left(\left(\sum_{k=0}^{l} |x([t-k])|\right)^{\frac{N+1}{2}}\right), \ t \geq 0.$$

Здесь функция u^1 *является решением линеаризованной задачи оптимальной стабилизации, совпадающей по форме с задачей* (3), (4), *и определяется формулой*

$$u^1(y) = K^1 y, \ K^1 = -\left[\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u\right]^{-1} \left(\mathcal{B}^T P \mathcal{A} + \mathcal{D}_{yu}^T\right),$$

где $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}_{yu}$, $\mathcal{D}_u$ *— известные матрицы, положительно определенная симметричная матрица* P *удовлетворяет уравнению* (5). *Функции* u^{k+1}, $1 < k \leq N-1$, *определяются формулами*

$$u^{k+1}(y) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u\right)^{-1}\left[M^{k+1^T}(y) - \mathcal{B}^T V_z^{k+2^T}\left(\left(\mathcal{A} + \mathcal{B}K^1\right) y\right)\right], 1 \leq k \leq N-1,$$

в которых $M^{k+1}(y)$, $V^{k+2}(z)$, $1 \leq k \leq N-1$, *— вычисляемые вектор-функции.*

[16] *Седов Ю.Н.* О стабилизации нелинейной периодической разностной системы управления релейного типа // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск, 1988. С. 75–82

Результаты первой главы применимы к задачам стабилизации систем автоматического регулирования, содержащим непрерывные подсистемы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, и импульсные подсистемы, описываемые разностными уравнениями, математических моделей, описывающих экономические процессы, и математических моделей популяционной динамики.

В § 1.6 построены асимптотические управления в задаче стабилизации численности популяции вокруг ее среднего размера (емкости среды обитания) K путем регулирования численности популяции

$$\frac{dx(t)}{dt} = r\left(1 - \frac{x([t])}{K}\right)x(t) - Ku,$$

а также путем регулирования скорости роста популяции

$$\frac{dx}{dt} = (r+u)\left(1 - \frac{x([t])}{K}\right)x(t).$$

Вопросы, связанные с оптимальным регулированием численности популяции в модели Хатчинсона с распределенным запаздыванием, рассматривались ранее в работе С.А. Кащенко[17].

Построено асимптотическое управление в задаче стабилизации численности популяции, описываемой модифицированной моделью популяционной динамики типа «хищник-жертва»

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1\left(1 - \frac{x_2([t])}{K_2}\right)x_1(t),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -r_2\left(1 - \frac{x_1([t])}{K_1}\right)x_2(t) + u.$$

Здесь x_1 отражает численность популяции «жертв», x_2 — численность популяции «хищников», r_1, r_2 — значения, характеризующие скорости воспроизведения, а K_1, K_2 — равновесные численности «жертв» и «хищников», соответственно, u отражает антропогенную деятельность, направленную на регулирование численности «хищников».

Во **второй главе** исследуется задача построения оптимальных стабилизирующих управлений для линейных периодических систем дифференциальных уравнений с последействием и конечномерным вольтерровым по Тихонову оператором.

[17] *Кащенко С.А.* Оптимизация процесса охоты // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 10. С. 1706–1709

В §2.1 описывается математическая модель линейных периодических конечномерных систем дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = (Fx)(t) + B(t)u,\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{14}$$

в которой оператор $F : C\left([-\tau, +\infty), \mathbb{R}^m\right) \to L_1^{loc}\left((0, +\infty), \mathbb{R}^m\right)$ удовлетворяет свойству $(Fx(\omega + \cdot))(t) = (Fx(\cdot))(\omega + t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, а его значения на $(0, \omega]$ совпадают со значениями линейного конечномерного вольтеррового по Тихонову оператора $\tilde{F} : C([-\tau, \omega), \mathbb{R}^m) \to L_1((0, \omega], \mathbb{R}^m)$, $u \in \mathbb{R}^r$, B — ω-периодическая матричная функция интегрируемая на $(0, \omega]$.

Критерий качества переходных процессов задан в виде

$$J = \int\limits_0^{+\infty} \left(x^T(t)C_1(t)x(t) + u^T(t)C_2(t)u(t)\right) dt, \tag{15}$$

где C_1, C_2 — ω-периодические матричные функции, значения которых являются симметрическими положительно определенными матрицами.

Доказано, что вольтерровый по Тихонову конечномерный оператор $\tilde{F}$ допускает представление

$$\left(\tilde{F}x\right)(t) = \sum_{i=1}^{K} a_i(t) \int\limits_{-\tau}^{\omega} d\mu_i^T(s)x(s),\ t \in (0, \omega], \tag{16}$$

где $a_i \in L_1\left((0, \omega], \mathbb{R}^m\right)$, $\operatorname{supp} a_i \in (t_i^-, t_i^+]$, $\mu_i : [-\tau, \omega] \to \mathbb{R}^m$ — функции с ограниченной вариацией, $\mu_i(s) = 0$ при $t_i^- < s \leq \omega$ и $\mu_i(s) = \mu_i(t_i^+ - \tau)$, при $-\tau \leq s \leq t_i^+ - \tau$ для некоторых чисел $0 \leq t_i^- < t_i^+ \leq \omega$, $t_i^+ - \tau \leq t_i^-$, $1 \leq i \leq I$.

В §2.2 получено общее решение $x\left(t, \varphi\right)$ неоднородной линейной периодической системы уравнений с последействием и конечномерным вольтерровым по Тихонову оператором, допускающим представление (16).

В §2.3 рассмотрена задача оптимальной стабилизации решений линейных периодических систем дифференциальных уравнений с последействием и конечномерным вольтерровым по Тихонову оператором (14) с критерием качества (15), обобщающая задачу оптимальной стабилизации решений линейных периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1) с критерием качества (2).

Учитывая специальную форму представления периодического конечномерного вольтеррового оператора в (14), множество допустимых управлений U^0 моделируется функциями $u = u\left(t, x_t(\cdot)\right) = \hat{u}\left(x_{n\omega}(\cdot)\right)$,

$x_t(s) = x(t+s)$, $s \in [-\tau, 0]$, $n\omega < t \le (n+1)\omega$, $n \ge 0$, определяемыми непрерывными отображениями $\hat{u}(\cdot) : C\left([-\tau, 0], \mathbb{R}^m\right) \to \mathbb{R}^r$.

Теорема 6. *Пусть линейный конечномерный вольтерровый по Тихонову оператор $\tilde{F} : C([-\tau, \omega), \mathbb{R}^m) \to L_1((0, \omega], \mathbb{R}^m)$ допускает представление* (16)*. Тогда задача оптимальной стабилизации в множестве допустимых управлений U^0 системы дифференциальных уравнений с последействием* (14) *и с критерием качества процесса управления* (15) *эквивалентна задаче оптимальной стабилизации системы разностных уравнений*

$$y_n = \mathcal{A} y_{n-1} + \mathcal{B} u_n, \ n \ge 0, \tag{17}$$

с дискретным критерием качества

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(y_{n-1}^T \mathcal{J}_1 y_{n-1} + y_{n-1}^T \mathcal{J}_2 u_n + u_n^T \mathcal{J}_2^T y_{n-1} + u_n^T \mathcal{J}_3 u_n \right). \tag{18}$$

Коэффициенты $\mathcal{A}$, $\mathcal{J}_1$ размерности $(m + \dim \mathcal{K}^-) \times (m + \dim \mathcal{K}^-)$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{J}_2$ размерности $(m + \dim \mathcal{K}^-) \times r$, $\mathcal{J}_3$ размерности $r \times r$ аналитически определяются через коэффициенты представления вольтеррового конечномерного оператора (16) *и коэффициенты задачи* (14), (15)*. Здесь $\mathcal{K}^- = \left\{ k : t_k^+ \le \tau, k = 1, \ldots, K \right\}$.*

Теорема 7. *Пусть для дискретной задачи оптимальной стабилизации* (17), (18) *существует оптимальное стабилизирующее управление $u_n^0 = \tilde{u}^0 \left(y_{n-1}^1, y_{(m+1)(n-1)}, \ldots, y_{(m+\dim \mathcal{K}^-)(n-1)} \right)$, $n \ge 0$. Тогда оптимальное стабилизирующее управление непрерывной задачи оптимальной стабилизации* (14), (15) *с множеством допустимых управлений U^0 определяется формулами*

$$u^0 = \hat{u}^0(x_{n\omega}(\cdot)) = \tilde{u}^0 \left(x(n\omega), \int\limits_{t_{j_1}^+ - \tau}^{0} d\mu_{j_1}^T(s) x(n\omega + s), \ldots, \int\limits_{t_{j_{\dim \mathcal{K}^-}}^+ - \tau}^{0} d\mu_{j_{\dim \mathcal{K}^-}}^T(s) x(n\omega + s) \right),$$

где $n\omega < t \le (n+1)\omega$, $n \ge 0$, дискретная функция $i \to j_i$ задает взаимно однозначное отображение упорядоченного множества чисел $\{m+1, \ldots, m + \dim \mathcal{K}^-\}$ на множество $\mathcal{K}^-$.

В §2.4 расширено множество допустимых управлений. Для заданного разбиения полуинтервала $(0, \omega]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = \omega$ множество допустимых управлений U^1 моделируется функциями

$u = u(t+\omega, x_t(\cdot)) = u(t, x_t(\cdot)),\ t \in \mathbb{R}^+,\ u = \sum_{j=1}^{p} \chi_{(t_{j-1},t_j]}(t-n\omega)u_{jn}(x_{n\omega}(\cdot))$, $n\omega < t \leq (n+1)\omega,\ n \geq 0$, определяемыми непрерывными отображениями $u_{jn}(\cdot)\colon C([-\tau,0],\mathbb{R}^m)\to\mathbb{R}^r$, $1 \leq j \leq p$, $n \geq 0$.

Коэффициенты $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ системы разностных уравнений (17) и критерия качества (18) в этом случае аналитически определяются через коэффициенты представления вольтеррового конечномерного оператора (16), коэффициенты задачи (14), (15) и точки выбранного разбиения полуинтервала $(0,\omega]$ в множестве допустимых управлений U^1; размерности матричных коэффициентов $\mathcal{B}$, $\mathcal{J}_2$ повышаются до $(m + \dim\mathcal{K}^-) \times rp$, коэффициента $\mathcal{J}_3$ — до $rp \times rp$.

Теорема 8. *Пусть для дискретной задачи оптимальной стабилизации* (17), (18) *существует оптимальное стабилизирующее управление* $u^0_{qn} = \tilde{u}^0_q\left(y^1_{n-1}, y_{(m+1)(n-1)}, \ldots,\ y_{(m+\dim\mathcal{K}^-)(n-1)}\right)$, $1 \leq q \leq p$, $n \geq 0$. *Тогда оптимальное стабилизирующее управление непрерывной задачи оптимальной стабилизации* (14), (15) *с множеством допустимых управлений* U^1 *определяется формулами*

$$u^0 = \sum_{q=1}^{p} \chi_{(t_{q-1},t_q]}(t-n\omega)\tilde{u}^0_q\left(x(n\omega), \int_{t^+_{j_1}-\tau}^{0} d\mu^T_{j_1}(s)x(n\omega+s), \ldots,\right.$$
$$\left.\int_{t^+_{j_{\dim\mathcal{K}^-}}-\tau}^{0} d\mu^T_{j_{\dim\mathcal{K}^-}}(s)x(n\omega+s)\right),\ n\omega < t \leq (n+1)\omega,\ n \geq 0.$$

Линейные периодические конечномерные системы дифференциальных уравнений с последействием удобно использовать в качестве аппроксимационных моделей для общих линейных периодических систем с последействием и находить для последних приближения оптимальных стабилизирующих управлений. **Глава 3** посвящена вопросу использования конечномерных аппроксимаций в задаче оптимальной стабилизации периодических систем с последействием, отличных от канонических[18,19].

В § 3.1 предлагается математическая модель линейных конечномерных аппроксимирующих систем дифференциальных уравнений с последействием, рассматриваются различные ее реализации.

[18] *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15

[19] *Шабалин М.Н., Шиманов С.Н.* Задача Летова для управления с запаздыванием времени и периодическими коэффициентами // Устойчивость и нелинейные колебания. Сб. науч. тр. Свердловск: Изд. УрГУ. 1984. С. 89–106

Объект управления определяется системой функционально-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = (Fx)(t) + B(t)u,\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{19}$$

в которой $x : [-\tau, +\infty) \to \mathbb{R}^m$, линейный вольтерровый по Тихонову оператор $F : C([-\tau,+\infty), \mathbb{R}^m) \to L_1^{loc}((0,+\infty), \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет свойству $(Fx(\omega+\cdot))(t)=(Fx(\cdot))(\omega+t)$, $t\in\mathbb{R}^+$, $u\in\mathbb{R}^r$, $B:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{m\times r}$ — ω-периодическая матричная функция интегрируемая на $(0,\omega]$.

Для разбиения $\Delta_I :\ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_I = \omega$ полуинтервала $(0,\omega]$ с дополнительными условиями $0 < t_i - t_{i-1} \le \tau$, $1 \le i \le I$, определим аппроксимирующую систему для системы (19) в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = (\hat{F}_I x)(t) + B(t)u,\ t \in \mathbb{R}^+, \tag{20}$$

в которой оператор $\hat{F}_I : C([-\tau, +\infty), \mathbb{R}^m) \to L_1^{loc}((0, +\infty], \mathbb{R}^m)$ является линейным конечномерным вольтерровым по Тихонову оператором. Класс периодических конечномерных вольтерровых операторов $\hat{F}_I\colon C([-\tau,\omega],\mathbb{R}^m)\to L_1((0,\omega],\mathbb{R}^m)$ на полуинтервале $(0,\omega]$ определяется с помощью формул

$$(\hat{F}_I x)(t) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K_i} A_{ik}(t)\chi_{(t_{i-1},t_i]}(t) \int\limits_{t_i-\tau}^{t_{i-1}} d\hat{\eta}_{ik}(s)x(s),\ t \in (0,\omega]. \tag{21}$$

Здесь K_i — натуральные числа; A_{ik} — ω-периодические матричнозначные функции интегрируемые по Лебегу на $(0,\omega]$; $\chi_E(\cdot)$ — индикатор множества E; $\hat{\eta}_{ik}$ — матричнозначные функции, элементы которых имеют ограниченные вариации на $[-\tau,\omega]$, $\hat{\eta}_{ik}(s) = 0$ при $s \in (t_{i-1},\omega]$, $\hat{\eta}_{ik}(s) = \hat{\eta}_{ik}(t_i-\tau)$ при $s \in [-\tau, t_i-\tau]$, $1 \le k \le K_i$, $1 \le i \le I$; при каждом i, $1 \le i \le I$, набор функций A_{ik} и $\hat{\eta}_{ik}$, $1 \le k \le K_i$, выбран линейно независимым.

С учетом специальной формы представления оператора $\hat{F}_I$ множество допустимых управления U моделируется периодическими кусочно-постоянными векторными функциями

$$u = \sum_{i=1}^{I'} \chi_{(t'_{i-1},t'_i]}(t-n\omega)\hat{u}_{ni}\left(x_{n\omega}(\cdot)\right),\ n\omega < t \le (n+1)\omega,\ n \in \mathbb{Z},\ n \ge 0, \tag{22}$$

определяемыми непрерывными отображениями $\hat{u}_{in}(\cdot)\colon C([-\tau,0],\mathbb{R}^m)\to\mathbb{R}^r$, $1 \le i \le I'$. Здесь используется разбиение $\Delta'_{I'} :\ 0 = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_{I'} = \omega$ полуинтервала $(0,\omega]$.

Определение. Класс операторов (21) называется аппроксимирующим для оператора F уравнения (19), если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся разбиение Δ_I и натуральные числа K_i, $1 \le i \le I$, такие, что $\left\| \hat{F}x - \hat{F}_I x \right\|_{L_1} < \varepsilon$ для каждой функции $x \in C\left([-\tau, \omega], \mathbb{R}^m\right)$.

Для дискретной реализации класса (21)

$$(\hat{F}_I^d x)(t) = \sum_{i=1}^{I} \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \sum_{j=-M+1}^{i} \int\limits_{\mathcal{A}_j} d\eta(t, z-t) x(t_{j-1}),\ t \in (0, \omega], \qquad (23)$$

где $t_{j-I} = t_j - \omega$, $j = 1 \dots I{-}1$, t_{-M} — точка, ближайшая к точке $t = -\tau$ и расположенная справа от нее, $\mathcal{A}_j = (t_{j-1}, t_j] \cap (t - \tau, t]$, $j = -M+1, \dots i$, $i = 1, \dots I$, $t \in (0, \omega]$, справедлив следующий результат

Теорема 9. *Пусть $\eta(t, z-t) = 0$, при $t \le z \le \omega$, $\eta(t, z-t) = \eta(t, -\tau)$, при $-\tau \le z \le t - \tau$, $0 < t \le \omega$, элементы η_{pq}, $1 \le p, q \le m$, матричнозначной функции η — ω-периодические функции по первому аргументу, при каждом фиксированном значении второго аргумента $z - t \in [-\tau,\ 0]$ интегрируемы по Лебегу на $(0, \omega]$, а при почти каждом фиксированном значении первого аргумента $t \in (0, \omega]$ имеют ограниченные вариации $\mathrm{var}_{[-\tau,0]}\eta_{pq}(t, \cdot)$, $1 \le p, q \le m$, интегрируемые по Лебегу на $(0, \omega]$, $\eta(t, 0) = 0$, $t \in (0, \omega]$. Тогда класс дискретных операторов (23) является аппроксимирующим для оператора F уравнения (19). Если при $I \to +\infty$ диаметр разбиения δ_I полуинтервала $(0, \omega]$ стремится к нулю, то последовательность операторов $\{\hat{F}_I^d\}_1^{+\infty}$, определяемая формулами (23), сильно сходится к оператору F на полуинтервале $(0, \omega]$.*

Для усредняющей реализации класса (21)

$$(\hat{F}_I^s x)(t) = \sum_{i=1}^{I} \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \sum_{j=-M+1}^{i} \int\limits_{\mathcal{A}_j} d\eta(t, z-t) \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} x(s) ds,\ t \in (0, \omega] \quad (24)$$

справедлив следующий результат

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы 9, а также $\int_0^\omega \mathrm{var}_{s \in [-\delta, 0]}\, \eta_{p,q}(t, s) dt \to 0$, $1 \le p, q \le m$ при $\delta \to 0$. Тогда класс дискретных операторов (24) является аппроксимирующим для оператора F уравнения (19). Если при $I \to +\infty$ имеем $\delta_I \to 0$, то последовательность операторов $\{\hat{F}_I^s\}_1^{+\infty}$, определяемая формулами (24) сильно сходится к оператору F на полуинтервале $(0, \omega]$.*

Для реализации класса (21) с помощью абстрактных рядов Фурье

$$\left(\hat{F}_I^f x\right)(t) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K_i} \chi_{(t_{i-1},t_i]}(t)\psi_{ik}(t) \int\limits_{t_i-\tau}^{t_{i-1}} d\tilde{\eta}_{ik}(s)x(s),\ t\in(0,\omega]. \qquad (25)$$

где $\{\psi_{ik}(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty}$ — ортонормированные функции, образующие ортонормированные системы функций в пространствах $L_2\left((t_{i-1},t_i],\mathbb{R}^m\right)$, $\tilde{\eta}_{ik}(s) = \int_{t_{i-1}}^{t_i}\psi_{ik}^T(z)\eta(z,s-z)dz$, $s\in[t_i-\tau,t_{i-1}]$, $1\le k\le K_i$, $1\le i\le I$, $\operatorname{var}_{z\in[-\tau,0]}\eta_{pq}(\cdot,z)\in L_2(0,\omega]$, $1\le p,q\le m$, справедлив следующий результат

Теорема 11. *Пусть выполнены условия теоремы* 9, *а также*

1) $\operatorname*{var}\limits_{z\in[-\tau,0]}\eta_{pq}(\cdot,z)\in L_2(0,\omega]$, $1\le p,q\le m$,

2) $\int\limits_0^\omega\left(\operatorname*{var}\limits_{z\in(-\delta,0]}\eta_{pq}(t,z)\right)^2 dt\to 0$ *и* $\int\limits_0^\omega\left(\operatorname*{var}\limits_{z\in[-\tau,-\tau+\delta)}\eta_{pq}(t,z)\right)^2 dt\to 0$,

$1\le p\le q\le m$, *при* $\delta\to 0$. *Тогда класс операторов* (25), *определяемых с помощью абстрактных рядов Фурье, является аппроксимирующим для оператора* F *уравнения* (19). *Если при* $I\to+\infty$ *имеем* $\delta_I\to 0$ *и* $K_i\to+\infty$, $1\le i\le I$, *то последовательность операторов* $\{\hat{F}_I^f\}_1^{+\infty}$ *сильно сходится к оператору* F *на полуинтервале* $(0,\omega]$.

В § 3.2 получено общее представление неоднородной линейной периодической системы уравнений с последействием и конечномерным вольтерровым по Тихонову оператором, допускающим представление (21).

В §3.3 рассмотрена задача оптимальной стабилизации решений линейных периодических систем дифференциальных уравнений с последействием и конечномерным вольтерровым по Тихонову оператором (19) с критерием качества (15) с помощью аппроксимирующих систем (20).

Теорема 12. *Пусть аппроксимирующий оператор* $\hat{F}_I : C([-\tau,\omega),\mathbb{R}^m)\to L_1((0,\omega],\mathbb{R}^m)$ *допускает представление* (21). *Тогда задача оптимальной стабилизации в множестве допустимых управлений* U *аппроксимирующей системы дифференциальных уравнений с последействием* (20) *и с критерием качества процесса управления* (15) *эквивалентна задаче оптимальной стабилизации системы разностных уравнений*

$$y_n = \mathcal{A}y_{n-1} + \mathcal{B}\hat{u}_n,\ n\ge 0,\ \hat{u}_n = \left(\hat{u}_{n1}^T,\dots,\hat{u}_{nI'}^T\right)^T, \qquad (26)$$

с дискретным критерием качества

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(y_{n-1}^T\mathcal{J}_1 y_{n-1} + y_{n-1}^T\mathcal{J}_2\hat{u}_n + \hat{u}_n^T\mathcal{J}_2^T y_{n-1} + \hat{u}_n^T\mathcal{J}_3\hat{u}_n\right). \qquad (27)$$

Здесь матричные коэффициенты $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ — аналитически определяются матричными функциями $A_{ik}(t)$, $\hat{\eta}_{ik}$, $1 \le k \le K_i$, $1 \le i \le I$, $B(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $t \in (0,\omega]$ и выбранным разбиением Δ_I.

Теорема 13. *Пусть операторы $\hat{F}_I$ сильно сходятся к непрерывному оператору $\hat{F}: \quad C([-\tau,\omega],\mathbb{R}^m) \to \quad L_2((0,\omega],\mathbb{R}^m)$ и для дискретной задачи оптимальной стабилизации* (26), (27) *при достаточно большом I существуют оптимальные стабилизирующие управление, принадлежащие классу допустимых функций* (22). *Тогда существует I такое, что стабилизирующие управления для системы* (19) *определяются формулами*

$$u(t,x_{n\omega}(\cdot))=\sum_{i=1}^{I'}\chi_{(t'_{i-1},t'_i]}(t-n\omega)\hat{u}^0_{ni}\left(x(n\omega),\int\limits_{t_{i_{m+1}}-\tau}^{0}d\eta_{i_{m+1}k_{m+1}}(s)x(n\omega+s),\ldots,\right.$$
$$\left.\int\limits_{t_{i_M}-\tau}^{0}d\eta_{i_Mk_M}(s)x(n\omega+s)\right),\ n\omega<t\le(n+1)\omega,\ n\ge 0.$$

Результаты, полученные в главах 2, 3, могут быть использованы в задачах стабилизации математических моделей экономических систем, математических моделей популяционной динамики, а также систем автоматического регулирования[20].

Разработанные методы и алгоритмы, теоретическое обоснование которых приведено в главах 1–3, составляют основу программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8. **Глава 4** посвящена вопросам использования программного комплекса для решения задач оптимальной стабилизации решений линейных и нелинейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами и систем линейных периодических функционально-дифференциальных уравнений с конечномерными вольтерровыми операторами. Рассмотрены базовые принципы организации работы программного комплекса, его состав (§4.1) и различные способы его использования при решении практических задач (§§4.2, 4.3).

[20] *Sridhar R., Hohn R.E., Long G.W.* Contribution to machine tool chatter research – 5,7 // Journ. of Engineering for Industry Trans. of the ASME. 1968. Ser. B. Vol. 90, №. 2. pp. 317–324, 330–334.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА

Работы, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК:

1. *Кошкин Е.В.* Метод продолжения решения по параметру в задаче оптимальной стабилизации систем линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Вестник Тамбовского Университета. Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16, № 4, С. 1105–1107.

2. *Кошкин Е.В.* Метод продолжения по параметру в задаче оптимальной стабилизации линейных периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Системы управления и информационные технологии. Москва-Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2012. С. 16–20.

3. *Кошкин Е.В.* Конечномерные аппроксимации в задаче стабилизации периодических систем с последействием // Вестник Тамбовского Университета. Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18, № 5, С. 2561–2563.

4. *Долгий Ю.Ф., Кошкин Е.В.* Оптимальная стабилизация линейных периодических конечномерных систем дифференциальных уравнений с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УРО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 87–98.

5. *Долгий Ю.Ф., Кошкин Е.В.* Использование конечномерных аппроксимаций в задаче стабилизации периодических систем с последействием. // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 29–45.

Патенты и свидетельства о регистрации программ:

6. *Кошкин Е.В.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014661613 "PCAStab для Wolfram Mathematica 8". Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 10 ноября 2014.

Другие публикации:

7. *Кошкин Е.В.* Исследование динамики модели Хатчинсона с кусочно-постоянным аргументом // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 38-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 169–173.

8. *Кошкин Е.В.* Синтез управлений для дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 39-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. 2008. С. 270–274.

9. *Кошкин Е.В.* Оптимальная стабилизация решений дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 40-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. С. 155–160.

10. *Кошкин Е.В.* Оптимальная стабилизация динамических процессов в системах дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Тез. докладов XI-й международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, 2010. С. 195–197.

11. *Долгий Ю.Ф., Кошкин Е.В.* Оптимальная стабилизация систем нелинейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Тезисы II Международной школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». Иркутск, 2010. С. 25.

12. *Кошкин Е.В.* Оптимальная стабилизация систем линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тез. 41-й Всероссийскойой молодежной конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. С. 359–366.

13. *Долгий Ю.Ф., Кошкин Е.В.* Оптимальная стабилизация динамических процессов в периодических линейных системах дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Проблемы динамического управления: Сб. науч. трудов ф-та ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. 2010. Вып. 5. С. 102–112.

14. *Кошкин Е.В.* Построение оптимальных стабилизирующих управлений в математической модели Хатчинсона с кусочно-постоянными аргументами // Современные проблемы математики: Тез. 42-й Всероссийскойой молодежной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. С. 37–39.

15. *Кошкин Е.В.* Продолжение по параметру в задаче оптимальной стабилизации систем линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Тез. докладов международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль, 2011. С. 115–117.

16. *Кошкин Е.В., Долгий Ю.Ф.* Построение оптимального стабилизирующего управления для нелинейной системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Тез. XII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, 2012. С. 183–185.

17. *Кошкин Е.В.* Применение метода Понтрягина для построения оптимальных стабилизирующих управлений в линейных системах с кусочно-постоянными аргументами // Труды X международной четаевской конференции. Казань, 2012. Т. 3, ч. II. С. 47–56.

18. *Кошкин Е.В.* Стабилизация конечномерных периодических систем дифференциальных уравнений с последействием средствами программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8 // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби: Тез. докл. II Междунар. семинара, посвященного 70-летию со дня рождения акад. А.И. Субботина. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, УрФУ. 2015. С. 74–75.

Подписано в печать 22.04.2015	Формат 60x84 1/16	Бумага писчая
Офсетная печать	Тираж 100 экз.	Заказ №__

Отпечатано в УПК УрФУ
620002, Екатеринбург, ул. Мира 19