

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
профессионального образования “Уральский
федеральный университет имени первого
Президента России Б.Н. Ельцина”**

На правах рукописи

КРАСОВСКИЙ Николай Андреевич

**ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ
РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ ИГРАХ**

05.13.18 - математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

Д и с с е р т а ц и я

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор А.М. Тарасьев

Екатеринбург

2015

Оглавление

Введение	4
I Динамическая модель поиска равновесных состояний для систем с информационным обменом	16
1. Описание модели	19
2. Равновесие по Нэшу	21
3. Множество точек максимума по Парето	24
4. Доминирование точек максимума Парето над равновесием по Нэшу	27
4.1. Взаиморасположение парабол в случае $\alpha = 0, \alpha = 1$	29
4.2. Направление “рожек” для парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$. .	30
4.3. Анализ ситуаций пересечения парабол	32
4.4. Решение системы неравенств	39
5. Рыночное равновесие	47
6. Аналитический метод решения	51
7. Численный метод решения	53
8. Доказательство локальной устойчивости рыночного рав- новесия для динамики алгоритма	57
II Равновесные траектории в биматричных играх	58
9. Эволюционная игра с ненулевой суммой. Динамическое равновесие по Нэшу	60
9.1. Динамика модели, функции выигрыша	60
9.2. Динамическое равновесие по Нэшу	63
9.3. Вспомогательные игры с нулевой суммой	64
9.4. Построение равновесия по Нэшу	66
10. Аналитическое решение дифференциальной игры с тер- минальным функционалом	68
10.1. Функции цены и обобщенные решения уравнений Гамильтона-Якоби	68
10.2. Описание аналитического решения краевой задачи .	71
10.3. Проверка дифференциальных неравенств в терми- нальной краевой задаче	73
11. Нижняя оболочка терминальной функции цены и функ- ция цены игры с мультитерминальным функционалом вы- игрыша	77
11.1. Дифференциальная игра с мультитерминальным функционалом	77
11.2. Описание решения для игры с мультитерминаль- ным функционалом	81

11.3.	Проверка свойств u - и v - стабильности в мульти- терминальной игре	89
12.	Гибкие “позитивные” управления по принципу обратной связи, генерируемые функциями цены в мультитерми- нальных играх	91
12.1.	Описание оптимальных управлений по принципу обратной связи	91
12.2.	Значение цены, гарантируемое оптимальным управ- лением по принципу обратной связи для мультитер- минальных выигрышей	95
13.	Равновесие по Нэшу с гибкими “позитивными” управлени- ями по принципу обратной связи в мультитерминальных играх	97
13.1.	Структура равновесия по Нэшу	97
13.2.	Траектории, генерированные гибкими “позитивны- ми” управлениями	99
14.	Модели динамических биматричных игр	100
14.1.	Модель биматричной игры с одним статическим равновесием	100
14.2.	Модель биматричной игры с тремя статическими равновесиями	105
	Литература	110

Введение

Общая характеристика работы.

Задачи игровой динамики являются адекватными моделями конкурентных ситуаций, возникающих в экономических системах. В связи с этим анализ таких задач привлекал внимание многих исследователей в России и за рубежом. Особый интерес вызывает построение таких конструкций в игровых моделях, которые, с одной стороны, объясняют механизмы взаимодействий участников, а, с другой стороны, имеют строгие математические обоснования, связанные с теоремами существования решений, построением алгоритмов поиска равновесия и доказательством их сходимости. Важным элементом в части разработки алгоритмов является возможность правильной интерпретации их шагов с предметной точки зрения. Отметим в связи с этим, что теория игр является стремительно развивающейся отраслью математики в многочисленных научных школах. Представленная диссертационная работа выполнена в рамках методов и подходов, разрабатываемых в Уральской школе оптимального управления, созданной Н.Н.Красовским. Основные результаты диссертации получены на основе конструкций позиционных стратегий игроков. Качественной особенностью работы является развитие этих конструкций в рамках идеи декомпозиции алгоритмов поиска равновесия. В работе рассмотрены модели аукционов и биматричных игр, для которых предложены строгие решения и разработаны декомпозиционные алгоритмы поиска равновесия. Все модели иллюстрируются конкретными игровыми ситуациями, возникающими в экономических приложениях. Для этих примеров проведена эконометрическая калибровка параметров игровых моделей и построены динамические равновесные траектории. Показано, что динамические равновесные траектории обладают лучшими качественными свойствами, чем решения статических игр.

Актуальность темы.

Современное состояние теории динамической оптимизации характеризуется развитием алгоритмов построения оптимальных равновесных траекторий в задачах оптимального управления и дифференциальных играх в связи с востребованностью вычислительных методов в прикладных задачах. Особый интерес к этой теме имеется в задачах механики, теории управления движением, инженерных и технических науках, науках об окружающей среде, экономики и финансовой математики. Актуальность темы подтверждается возрастающим потоком научных публикаций по алгоритмам и вычислительным методам решения задач теории

управления и дифференциальных игр в российских и зарубежных изданиях.

Математический аппарат диссертационной работы основан на методах теории оптимального управления и конструкциях обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби, развиваемых в школе Н.Н. Красовского. Основу этого аппарата составляют понятия стабильных мостов, введенных в рамках строгой формализации задач управления в условиях неопределенности в работах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [62]. В работе используются подходы к построению динамических равновесных решений в неантагонистических позиционных дифференциальных играх, развитые в монографии А.Ф. Клейменова [44] на основе конструкций универсальных позиционных стратегий Н.Н. Красовского. Для построения аналитических решений в эволюционных играх в рамках подхода, предложенного А.В. Кряжимским и Ю.С. Осиповым [65], применяются дифференциальные неравенства, определяющие обобщенные минимаксные решения уравнений Гамильтона-Якоби в монографии А.И. Субботина [95]. Используются конструкции принципа максимума Л.С. Понтрягина [90] и его модификации для задач с бесконечным горизонтом, развитые в работах С.М. Асеева и А.В. Кряжимского [10].

В аспекте развития теории оптимального управления и теории дифференциальных игр существенными являются работы С.М. Асеева [10], Р.В. Гамкрелидзе [26], М.И. Зеликина [37], А.В. Кряжимского [10, 65], А.Б. Куржанского [66–68], П. Варайя [186], А.А. Меликяна [74], П. Бернарда [140], Е.Ф. Мищенко [76], Ю.С. Осипова [82], Б.Н. Пшеничного [91], Н.Н. Субботиной [99, 100], В.Е. Третьякова [106], В.Н. Ушакова [108–111], А.Г. Ченцова [115], Ф.Л. Черноусько [116–118], В.И. Бердышева [13], Р. Айзекса [4], Р. Беллмана [12], Л. Берковица [139], Р.Е. Калмана [172], М.Дж. Крэндалла [149], В. Лакшмикантама [187], Дж. Лейтмана [70], П.-Л. Лионса [189], Ж.П. Обэна [128, 129], В. Флеминга [158], А. Фридмана [159], А. Брайсона и Хо Ю-Ши [18].

Значительный вклад в развитие методов теории оптимального управления и дифференциальных игр внесли Э.Г. Альбрехт [5], Б.И. Ананьев [6], И.М. Ананьевский [7], А.В. Арутюнов [9], В.Д. Батухтин [11], Ю.И. Бердышев [14], В.И. Благодатских [15], Н.Н. Болотник [16], В.Г. Болтянский [17], С.А. Брыкалов [19], Ф.П. Васильев [22], Р.Ф. Габасов [25], Н.Л. Григоренко [28], М.И. Гусев [30], А.А. Давыдов [32], А.В. Дмитрук [34], В.И. Жуковский [35], С.Т. Завалицин [36], А.Д. Иоффе [39], Ф.М. Кириллова [25], А.В. Ким [42], А.Ф. Клейменов [44], В.Б. Колмановский [7], А.И. Короткий [46], В.Б. Костоусов [13], Е.К. Костоусо-

ва [47], А.А. Красовский [48], А.Н. Красовский [49], Ю.С. Ледяев [69], М.И. Логинов [190], Н.Ю. Лукоянов [71], В.В. Мазалов [72], В.И. Максимов [73], А.А. Милютин [75], М.С. Никольский [78,79], О.И. Никонов [80], А.И. Овсеевич [81], В.С. Пацко [83], А.Г. Пашков [200], Н.Н. Петров [84], Л.А. Петросян [85], В.Г. Пименов [86], Е.С. Половинкин [87], С.А. Решмин [23], Д.А. Серков [93], А.Н. Сесекин [94], В.В. Стружанов [20], А.М. Тарасьев [101–103], Г.А. Тимофеева [104], В.М. Тихомиров [39], Е.Л. Тонков [105], В.И. Ухоботов [107], Т.Ф. Филиппова [113], А.А. Чикрий [35], С.В. Чистяков [120], А.Ф. Шориков [123], М. Барди [133,134], Е.Н. Баррон [136], А. Бенсусан [138], Дж. Варга [21], И.К. Дольчетта [151], М. Ишии [170], Р. Йенсен [136], П.В. Кокотович [146], Е. Роксин [204], П.Е. Соуганидис [208], М. Фальконе [155], Л. Чезаре [144], Ф.Е. Удвадиа [217] и многие другие ученые.

Важное место в диссертации занимают декомпозиционные алгоритмы поиска равновесных решений в динамических неантагонистических играх. Эти исследования осуществляются в рамках теории эволюционных игр, в частности, на основе подходов, развитых в работах Н.Н. Воробьева [24], А.В. Кряжимского и Ю.С. Осипова [65], Л.А. Петросяна и В.В. Мазалова [201], Р. Аксельрода [132], Т. Башара и Дж. Олсдера [137], У. Зангвилла и Ч. Гарсия [222], Ю.М. Каниовского и Х.П. Янга [173], А. Нентьеса [193], С. Смэйла [207], Д. Фридмана [160], Д. Фуденберга и Д. Крепса [161], Дж. Хофбауэра и К. Зигмунда [167], Х. Эхтамо и Р.П. Хамалайнена [152].

Большое внимание в диссертации уделяется построению обобщенных минимаксных решений уравнений Гамильтона-Якоби на основе конструкций дифференциальных неравенств для производных по направлению и сопряженных производных, разработанных в трудах А.И. Субботина [95–98].

Результаты диссертации существенным образом опираются на методы теории выживаемости, развитые в работах Ж.П. Обэна [128,129]. Важную роль в направлении разработки численных методов построения множеств достижимости управляемых систем играют исследования В.Н. Ушакова и его сотрудников [108–111]. Отметим здесь работы А.Б. Куржанского, М.С. Никольского, Е.С. Половинкина, Ф.Л. Чернусько и их сотрудников по оценке областей достижимости динамических систем (см. [66,67,78,87,116]).

Модели математической экономики и финансовой математики служат важными приложениями для теории игр. В последнее время увеличился интерес к динамическим постановкам игровых задач в науках

по окружающей среде, в моделях игровых взаимодействий участников рынка и теории инвестиций. Этому направлению посвящены работы лауреатов Нобелевской премии К. Эрроу, Л.В. Канторовича, Т. Шеллинга, Р. Ауманна, Л. Шепли (см. [126, 130, 174, 206]).

Прикладным аспектам теории игр в моделях экономики окружающей среды посвящены труды Т. Купманса [175], У. Нордхауса [195], Ф. Вирла [221], А. Нентьеса [193], М. Хойля [166], П. Чандера и Х. Тулкенса [145].

Финансовые составляющие игровых моделей отражены в работах Нобелевских лауреатов Г. Марковица [192] и У. Шарпа [121]. Важные вопросы динамики финансовых потоков, используемые в диссертации, представлены в работах Л. Крушвица [64] и Е.М. Четыркина [119].

Прикладными задачами теории динамических игр занимаются такие известные специалисты по оптимальному управлению как Дж. Лейтман [70, 143], Ф. Удвадиа [217], Л. Ламбертини [188], С. Пикль [176] и К. Дейссенберг [150]. Отметим здесь также работы финского экономиста Т. Палокангаса [199] по проблематике игрового равновесия в моделях экономического роста.

Диссертационная работа связана с развитием методов теории оптимального управления и дифференциальных игр школы Н.Н. Красовского и приложениями динамических игровых конструкций к упомянутым актуальным вопросам экономического моделирования, теории инвестиций и защиты окружающей среды.

Цель работы.

Целью работы является разработка алгоритмов построения равновесных траекторий в динамических некооперативных играх. Основу алгоритмов составляют декомпозиционные свойства стратегий управления и обмена информацией, которые обеспечивают конструктивные возможности по реализации этих алгоритмов в практических приложениях. В работе демонстрируется эффективность гарантированного минимаксного подхода в построении стратегий управления Н.Н. Красовского и методов теории обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби для конструирования функций цены в задачах с конечным и бесконечным горизонтом. Важной составляющей исследования является анализ качественных свойств равновесных траекторий, порожденных декомпозиционными стратегиями управления. Разработанные декомпозиционные стратегии управления обеспечивают сдвиг решений от классических равновесий по Нэшу к равновесным решениям с лучшими показателями качества. Алгоритмы доведены до программных комплексов, работа кото-

рых продемонстрирована на динамических моделях экономики и теории инвестиций.

Методы исследования.

В работе используются методы теории дифференциальных игр, разрабатываемые в школе Н.Н. Красовского. Для построения динамики моделей используются подходы из теории эволюционных игр для больших групп популяций. Применяются конструкции теории исследования операций, выпуклого и негладкого анализа. Особую роль в исследованиях выполняют методы, основанные на свойствах дифференциальных неравенств в теории обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби.

Научная новизна.

В работе разработаны алгоритмы построения равновесных траекторий в динамических играх, которые сдвигают решения от классических равновесий по Нэшу к равновесным решениям с лучшими значениями функционалов. В задаче аукционного типа такой сдвиг осуществляется в направлении Паретовского множества. Показано, что этот сдвиг выделяет равновесные решения на Паретовском множестве, которые обладают как кооперативными свойствами точек Парето, так и декомпозиционными свойствами точек Нэша. Для эволюционных игр построены равновесные решения на основе гарантированного минимаксного подхода Н.Н. Красовского. Установлено, что предлагаемые равновесные решения обладают лучшими свойствами по значению функционалов, чем классические решения эволюционных игр и статических игр.

Теоретическая и практическая ценность.

Теоретические результаты, полученные в работе, ориентированы на построение стратегий управления с декомпозиционными свойствами в динамических некооперативных играх. Декомпозиционные свойства подразумевают независимый выбор управляющих воздействий игроками, с одной стороны, и учет минимального обмена информацией для сдвига решения от классических равновесий по Нэшу к равновесным решениям с лучшими значениями функционалов выигрыша, с другой стороны. Такие декомпозиционные свойства предполагают реалистичное использование предлагаемых стратегий управления в практических моделях экономики и финансовой математики. Особый интерес представляет анализ качественных свойств разработанных равновесных решений. Предлагаемый подход доведен до конкретных алгоритмов построения равновесных траекторий, которые реализованы в комплексах программ и работа которых продемонстрирована в конкретных приложениях для моделей торговли

снижениями эмиссий, моделей инвестиций в ценные бумаги и моделей производственных инвестиций в крупные проекты.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались на международных и всероссийских конференциях: XVI Уральская международная конференция молодых ученых по приоритетным направлениям развития науки и техники (Уральского государственного технического университета-УПИ, г. Екатеринбург, 24–25 мая 2009 г.); Международная конференция “Актуальные проблемы теории устойчивости и управления” (APSCT’2009) (Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, 21–26 сентября 2009 г.); научный семинар “Проблемы динамического управления” кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (г. Москва, 12–15 октября 2010 г.); Международная конференция “Динамика систем и процессы управления” (SDCP’2014) (Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург, 15–20 сентября 2014 г.). Результаты обсуждались также на научных семинарах отдела динамических систем Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; на научных семинарах кафедры анализа систем и принятия решений Уральского федерального университета им. первого Президента России Б.Н. Ельцина; на научных семинарах кафедры информационных технологий и математического моделирования Уральского государственного аграрного университета.

Публикации.

Основные материалы диссертации опубликованы в семи работах. Из них три публикации из списка ВАК [51, 52, 55], одна публикация в сборнике научных трудов МГУ [54], одна публикация в трудах международной конференции молодых ученых [50] и два тезиса докладов [53, 56]. В совместных работах [51, 52, 54, 55] научному руководителю А.М. Тарасьеву и А.В. Кряжимскому принадлежат постановки задач, а основные результаты получены автором.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Нумерация утверждений и формул производится по параграфам. Объем работы составляет 127 страниц текста. Библиография содержит 222 наименования.

Основное содержание работы.

В первой главе диссертации рассматривается модельная конструк-

ция, синтезирующая математическую модель некооперативных игр, и экономическую модель “торговли” аукционного типа. Предлагается решение, которое сдвигает равновесную ситуацию по Нэшу в игре к точкам, лежащим на паретовском множестве. Такой сдвиг осуществляется в рамках декомпозиционного алгоритма по обмену информацией между участниками. На верхнем уровне конструкции аукционер вырабатывает систему цен для участников аукциона. На нижнем уровне участники оптимизируют свои функции выигрыша при заданной цене и сообщают свой оптимальный ответ аукционеру. В итерационной процедуре алгоритма участники находят новое равновесное состояние на паретовском множестве. Следует подчеркнуть, что обмен информацией между участником и аукционером производится независимо от других участников аукциона, и это обстоятельство выражается в закрытости информации по индивидуальным ценам. Предложенная конструкция иллюстрируется переговорным процессом по снижению промышленных эмиссий.

Первая глава состоит из параграфов 1-8.

В первом параграфе приводится описание модели. В этой модели в качестве затрат по снижению эмиссий выбраны квадратичные функционалы, а для описания экологического эффекта служат логарифмические функционалы. Функция полезности составляется как разность между затратами и выгодой от снижения эмиссий. Выбран вариант игры двух участников, одним из которых являются страны Восточной Европы, а другим страны бывшего Советского Союза. Коэффициенты для функций затрат и функций экологического эффекта основаны на реальных данных [153, 216], значения которых показывают, что затраты по снижению эмиссий значительно различаются для игроков: для стран Восточной Европы затраты значительно дороже.

Во втором параграфе дается определение конкурентного равновесия по Нэшу. Решается задача нахождения таких равновесий, которые участники достигают максимизируя собственные функции полезности.

В третьем параграфе дается определение точек кооперативного максимума по Парето. Рассматривается задача поиска всех точек максимума по Парето.

В четвертом параграфе приводится доказательство того, что в рассматриваемой модели существуют точки максимума по Парето, доминирующие равновесие по Нэшу по всем критериям.

В пятом параграфе приводится определение рыночного равновесия. Под рыночным равновесием понимается точка, лежащая в множестве точек максимума по Парето. Такое равновесие обладает специальными

декомпозиционными свойствами и достигается участниками в пошаговой процедуре обмена информацией.

В шестом параграфе представлено аналитическое решение поставленной задачи нахождения рыночного равновесия. Результаты реализованы в программе MATLAB. Приведена графическая иллюстрация решения для реальных данных. Такое аналитическое решение может служить в качестве теста для верификации численных алгоритмов поиска.

В седьмом параграфе рассматриваются вычислительные алгоритмы поиска точек рыночного равновесия. Следует отметить, что разработанные алгоритмы примыкают к теории позиционных дифференциальных игр [62, 179], включая раздел неантагонистических позиционных дифференциальных игр [44]. Они используют элементы дифференциально-эволюционных игр [65, 161, 168, 173, 183, 196, 207].

В восьмом параграфе представлено доказательство локальной устойчивости рыночного равновесия для динамики алгоритма. Доказательство основано на проверке критерия Сильвестра для матрицы Якоби правой части динамической системы.

В работе разработаны алгоритмы для модели аукциона. Они реализованы в комплексе программ в среде MATLAB. Важной составляющей алгоритмов является интегрирование нелинейных систем дифференциальных уравнений декомпозиционного типа. В вычислительной части выполнен ряд модельных экспериментов и проведено сравнение результатов предложенных алгоритмов и аналитических решений. Сравнение показывает высокую точность численного метода, который дает результаты, практически идентичные аналитическому решению.

Во второй главе рассматривается модель эволюционной игры с ненулевой суммой между двумя группами участников в рамках теории дифференциальных игр [179, 180]. Используются идеи и подходы неантагонистических дифференциальных игр [44]. Рассматриваются конструкции и методы анализа эволюционных игр, предложенные в работе [65]. Внимание сконцентрировано на построении динамического равновесия по Нэшу с гарантирующими стратегиями игроков, которые максимизируют соответствующие функции выигрыша. Строятся разрешающие траектории, которые дают результат, лучший по сравнению с классическими моделями, например, моделями с репликаторной динамикой [167].

Вторая глава состоит из параграфов 9-14.

В девятом параграфе рассматривается эволюционная игра с ненулевой суммой с биматричными функционалами выигрыша на бесконечном интервале времени. Для построения эволюционно-игровой динамики

используется дифференциально-игровой подход, разработанный в работах А.В. Кряжимского и Ю.С. Осипова [65]. Дается описание динамики для больших групп участников в виде дифференциальных уравнений А.Н. Колмогорова. Обосновывается возможность управления динамикой для каждой из групп игроков. Управляющие параметры интерпретируются как сигналы участникам групп по изменению стратегий поведения. Функционалы выигрыша коалиций определяются на траекториях системы дифференциальных уравнений игры в виде предельных значений средних биматричных выигрышей на бесконечном горизонте.

Для построенной эволюционной игры обсуждается понятие динамического равновесия по Нэшу. Это понятие основано на конструкциях дифференциальных игр, предложенных в работах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [62] и развитых А.Ф. Клейменовым для неанагонистических дифференциальных игр [44]. В основе динамического равновесия лежат решения дифференциальных игр с нулевой суммой. Равновесная траектория игры строится на основе гарантирующих стратегий, которые максимизируют собственные функционалы выигрыша. При этом, стратегии, которые минимизируют функционалы выигрыша противника, служат в конструкции динамического равновесия по Нэшу как стратегии наказания.

В десятом параграфе рассматриваются вспомогательные дифференциальные игры с параметрическим терминальным функционалом платы. На основе метода характеристик для уравнений Гамильтона-Якоби строятся функции цены для терминальных дифференциальных игр. Решения параметрического семейства терминальных дифференциальных игр получены аналитически в виде кусочно-гладких конструкций. Для поверхностей негладкой склейки функции цены проверяются дифференциальные неравенства для производных по направлению из работы А.И. Субботина [95] и сопряженных производных из работы А.И. Субботина и А.М. Тарасьева [98].

В одиннадцатом параграфе рассматривается дифференциальная игра с мультитерминальным функционалом выигрыша на бесконечном горизонте. Дается описание равновесного решения для игры с мультитерминальным функционалом. Для конструктивного построения решения дифференциальной игры с мультитерминальным выигрышем используется нижняя оболочка параметрического семейства терминальных функций цены. Для корректного обоснования того факта, что нижняя оболочка терминальных функций цены является решением мультитерминальной игры на бесконечном горизонте, проверяются свойства u -

стабильности и v -стабильности этой оболочки на основе дифференциальных неравенств из теории обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби.

В двенадцатом параграфе из функций цены мультитерминальных задач выделяются гарантирующие стратегии управления по принципу обратной связи и дается их аналитическое описание. Доказываются утверждения, обосновывающие тот факт, что траектории, порожденные гарантирующими стратегиями, обеспечивают результат для функционалов выигрышей на бесконечном горизонте, не худший, чем значения статической биматричной игры.

В тринадцатом параграфе на основе построенных решений мультитерминальных дифференциальных игр генерируется конструкция динамического равновесия в смысле подхода А.Ф. Клейменова [44]. Анализируется структура динамического равновесия и исследуются свойства траекторий, порожденных гарантирующими стратегиями управления.

В четырнадцатом параграфе рассматриваются модели динамических биматричных игр и строятся их решения на основе предложенного подхода.

В первой модели анализируется ситуация с одним статическим равновесием по Нэшу. Характерной конструкцией такой ситуации является игра на финансовых рынках акций и облигаций. Игроки представлены поведением торговцев, которые играют на повышение курса и называются “быками”, и торговцев, которые играют на понижение курса и называются “медведями”. Параметры матриц в этой игре означают доходность акций и облигаций, выраженную в виде процентных ставок.

Показано, что равновесные траектории в этой модели сходятся к точке пересечения линий переключения гарантирующих стратегий. Эта точка пересечения существенно отличается от точки статического равновесия по Нэшу, и значение обоих функционалов выигрыша в это точке пересечения лучше, чем в точке статического равновесия по Нэшу.

Во второй модели исследуется случай с тремя статическими равновесиями по Нэшу. Прототипом такой ситуации служат координационные игры. В таких играх функции выигрышей игроков не являются прямо противоположными и подразумевают скоординированные решения. Например, такая ситуация описывает процесс инвестирования двумя участниками рынка в два проекта.

В этом случае, в отличие от предыдущей модели, точка пересечения линий переключения гарантирующих стратегий имеется, но она не является точкой притяжения равновесных траекторий. При этом равно-

весные траектории, скользя по линиям переключения, сходятся к границам квадрата игры. Значения функционалов выигрыша в точках завершения динамики равновесных траекторий лучше, чем значения этих функционалов в точке среднего статического равновесия по Нэшу. Что же касается значений функционалов в точках статического равновесия, расположенных в вершинах квадрата, то здесь нет однозначного доминирования в сравнении с точками завершения динамики равновесных траекторий.

Основные результаты диссертации.

1. Для игровой задачи аукционного типа дано определение рыночного равновесия, сочетающего свойства точек максимума по Парето и декомпозиционную конструкцию равновесия по Нэшу. Доказано, что в рассматриваемой игре имеются точки максимума по Парето, в том числе точка рыночного равновесия, которые доминируют точку равновесия по Нэшу по всем критериям.
2. Разработаны аналитические методы оценки и вычислительные алгоритмы построения рыночного равновесия. Доказано свойство локальной устойчивости рыночного равновесия для вычислительных алгоритмов. Проведено сравнение результатов вычислительного алгоритма со значениями аналитического метода, которое демонстрирует высокую точность предложенных конструкций.
3. Для биматричных эволюционных игр анализируется понятие динамического равновесия по Нэшу, которое основано на конструкциях дифференциальных игр, предложенных в работах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина и развитых А.Ф. Клейменовым для неагонистических дифференциальных игр. Максимизирующие стратегии игроков синтезируются из функций оптимального гарантированного результата, которые, в свою очередь, конструируются в рамках методов теории обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби, предложенных А.И. Субботиным. На основе максимизирующих стратегий разработаны вычислительные алгоритмы построения равновесных траекторий в биматричных эволюционных играх.
4. Доказано, что траектории, порожденные максимизирующими стратегиями, обеспечивают результат для функционалов выигрышей игроков в биматричной эволюционной игре на бесконечном горизонте, не худший, чем значения биматричной статической игры. Построены равновесные траектории для динамических моделей инвестиций.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований 11-01-00427-а “Алгоритмы и динамические процедуры решения в дифференциальных играх и задачах управления”; грантом государственной поддержки ведущих научных школ Президента Российской Федерации НШ-5927.2012.1 “Исследование задач управления сложными динамическими системами, дифференциальных игр, обобщенных решений уравнений в частных производных. Применение разработанных методов и алгоритмов динамической оптимизации в задачах прикладного моделирования”; программой Президиума Российской Академии Наук № 29 “Динамические системы и теория управления” в рамках проекта УрО РАН 12-П-1-1002 “Управление в условиях конфликта и неопределенности. Позиционные стратегии и гамильтоновы конструкции в задачах управления”; Международным институтом прикладного системного анализа (IIASA).

Глава I

Динамическая модель поиска равновесных состояний для систем с информационным обменом

В работе рассматривается игровая модель, связанная с нахождением точек равновесия специального вида. Такие равновесные точки обладают как конкурентными, так и кооперативными свойствами. Рассматриваемая постановка имеет основание в реальных экономических процессах, в которых поиск равновесия производится при обмене информацией между игроками. Например, к такой постановке относится проблема нахождения обменного равновесия между агентами, которые производят и потребляют общественные блага. Другим примером может являться переговорный процесс аукционного типа. В этих процессах оценки и производственные стоимости каждого из агентов неизвестны другим. Каждый игрок может только сотрудничать, участвуя в производстве общественного блага (сотрудничество в виде денежного платежа не допускается). В качестве примера можно указать события в Нидерландах, где жители местности, находящейся под угрозой затопления, объединили усилия в сооружении плотин. В качестве другого примера можно привести многосторонние переговоры об обоюдном разоружении. Важным примером являются переговорные процессы по снижению эмиссий вредных веществ в атмосферу. Рассматриваемая модель примыкает к постановке задач теории неантагонистических игр [24, 27, 132, 137, 168, 222].

В данной работе внимание главным образом сконцентрировано на международном сотрудничестве по защите окружающей среды. Многие сотрудничества такого рода имеют форму соглашений между правительствами стран по обоюдному снижению эмиссий парниковых газов на трансграничных территориях. Примерами могут служить Второй Протокол о сокращении выбросов серы (1994 год), Киотский Протокол (1997 год) и Копенгагенская конференция ООН по изменению климата (2009 год). Обязательства протоколов могут сильно варьироваться. Например, во Втором Протоколе о сокращении выбросов серы - снижение к 2010 году совокупного среднего уровня выбросов на 87% относительно 1980 года. Цель же ограничений Киотского Протокола — снижение выбросов к 2012 году на 5,2% по сравнению с уровнем 1990 года.

Такая разница в цифрах ставит вопрос, возможно ли разработать процедуры для улучшения процесса переговоров, которые бы уточняли параметры соглашений, приемлемые для всех участников.

В экономической теории в достаточной степени пренебрегают та-

кого рода проблемами. В основном экономисты рассматривают вопрос существования стимула для участия в соглашении. Такие выводы о создании коалиции и ее стабильном состоянии обсуждаются в работе [135]. Более близки к вопросам нашего проекта работы [145, 191], в которых предлагаются алгоритмы нахождения равновесных решений. Такие конструкции определяют обязательства участников по снижению эмиссий. Недостаток такого подхода состоит в том, что денежные трансферы между участниками вовлечены в поиск кооперативного решения.

Наше внимание сконцентрировано главным образом на случае обоюдного трансграничного загрязнения, при котором страны “платят” друг другу снижением эмиссий в качестве “услуги за услугу”. Случай торговли обоюдным снижением эмиссий, который преобладает в реальной практике был исследован в работах [166, 193, 194]. При этом представлено статическое кооперативное решение.

В теории игр аналогичные идеи можно найти в работе [152], в которой с помощью алгоритмов распределения была проанализирована проблема вычисления оптимальных решений Парето.

В настоящем исследовании представлена комбинация математической модели некооперативных игр и экономической модели “торговли” снижением эмиссий на аукционе. При таком подходе международные переговоры по защите окружающей среды интерпретированы в качестве многосторонней торговли между странами, при которой “товаром” являются снижения эмиссий каждой из сторон. Основная идея заключается в том, что страна i желает снизить эмиссии на своей территории, лишь в случае, если в обмен на это она получает достаточное снижение загрязнений, “импортированных” из соседних стран, $i = 1, \dots, n$. В процессе каждая страна старается максимизировать свою функцию полезности, в которой затраты на снижение эмиссий сбалансированы с пользой от экологического эффекта. Экологический эффект увеличивается при снижении эмиссий всеми странами участниками международного соглашения.

В предложенной модели в качестве затрат по снижению эмиссий выбраны квадратичные функционалы, а для описания экологического эффекта служат логарифмические функционалы. Функция полезности составляется как разность между затратами и выгодой от снижения эмиссий. Выбран вариант игры двух участников, одним из которых являются страны Восточной Европы, а другим страны бывшего Советского Союза. Коэффициенты для функций затрат и функций экологического эффекта основаны на реальных данных [153, 216], значения которых показывают, что затраты по снижению эмиссий значительно различаются для игро-

ков: для стран Восточной Европы затраты значительно дороже.

В диссертации дается определение конкурентного равновесия по Нэшу. Решается задача нахождения таких равновесий, которые участники достигают максимизируя собственные функции полезности. Приводится определение точек кооперативного максимума по Парето. Рассматривается задача поиска всех точек максимума по Парето. Приводится доказательство того, что в рассматриваемой модели существуют точки максимума по Парето, доминирующие равновесие по Нэшу по всем критериям.

Важной конструкцией, используемой в диссертации, является определение рыночного равновесия. Под рыночным равновесием понимается точка, лежащая в множестве точек максимума по Парето. Такое равновесие обладает специальными декомпозиционными свойствами и достигается участниками в пошаговой процедуре обмена информацией.

Для случая двух игроков представлено аналитическое решение поставленной задачи нахождения рыночного равновесия. Результаты реализованы в программе MATLAB. Приведена графическая иллюстрация решения для реальных данных. Такое аналитическое решение может служить в качестве теста для верификации численных алгоритмов поиска.

Для общего случая рассматриваются вычислительные алгоритмы поиска точек рыночного равновесия. Следует отметить, что разработанные алгоритмы примыкают к теории позиционных дифференциальных игр [62, 179], включая раздел неантагонистических позиционных дифференциальных игр [44]. Они используют элементы дифференциально-эволюционных игр [65, 161, 168, 173, 183, 196, 207]. Представлено доказательство локальной устойчивости рыночного равновесия для динамики алгоритма. Доказательство основано на проверке критерия Сильвестра для матрицы Якоби правой части динамической системы.

Алгоритмы сформулированы в виде элементов аукциона. Аукционный процесс можно представить в виде декомпозиционного алгоритма поиска равновесия при дефиците информации (см. [66, 179, 218]). Аукционер предлагает конкретные для каждой страны цены или обменные курсы, которые определяют количественное снижение эмиссий на собственную территорию, которое страна i получит за счёт снижения собственных эмиссий на одну единицу. Страны-участники отвечают одновременно, указывая снижение эмиссий, которые они желают произвести, за предлагаемую цену. В процессе аукционер имеет информацию о коэффициентах перемещения эмиссий между странами-участниками. Он использует их, чтобы перевести снижение эмиссий, предложенных стра-

нами в итоговую загрузку конкретной страны загрязнениями. Аукционер не имеет точной информации о функциях полезности стран-участников. У него могут быть лишь грубые оценки темпов их роста. Аукционер учитывает предложенные странами-участниками снижения эмиссий и загрузку загрязнением и сравнивает их с требуемыми. В случае большого отклонения между “предложением” и “спросом” он предлагает новые цены. Со своей стороны участники отвечают снижением эмиссий, опираясь лишь на свои функции полезности. Алгоритмы реализованы в программе MATLAB. Важной составляющей алгоритмов является интегрирование нелинейных систем дифференциальных уравнений декомпозиционного типа. Проведено сравнение результатов предложенных численных алгоритмов и аналитических решений. Сравнение показывает высокую точность численного метода, который дает практически идентичные результаты аналитическому решению.

1. Описание модели

Рассматривается игровая модель, целью которой является сдвиг игроков от некооперативного равновесия к кооперативному максимуму. Прототипом такой задачи является модель торговли снижениями эмиссий (см. [193]). В модели задействовано n игроков, которыми могут являться страны – участники соглашения, решающие проблему по снижению эмиссий парниковых газов. Предполагается, что соглашение достигается в процессе пошагового аукциона, которым управляет аукционер. Каждая страна i контролирует собственную величину снижения эмиссий $x_i \geq 0$. Страна i заинтересована в максимизации собственной функции полезности w_i , которая задана формулой

$$w_i(x) = -C_i(x_i) + B_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j\right). \quad (1.1)$$

Здесь символ $x = (x_1, \dots, x_n)$ – полный вектор снижения эмиссий; $C_i(x_i)$ – функция затрат страны i на снижение эмиссий x_i ; $B_i(\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j)$ – функция экологического эффекта, который получает страна i благодаря общему снижению загрязнения $\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j$ на ее территории, и a_{ji} – коэффициент трансграничного переноса, т. е. часть промышленных выбросов страны j , перенесенных на территорию страну i . Предполагается, что $a_{ji} > 0$ и $\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j \leq 1$. Считается, что функции затрат C_i выпуклы и монотонно возрастают. Кроме того, предполагается, что функции экологического эффекта B_i строго вогнуты и монотонно воз-

растают, а также имеют уровень насыщения \bar{y}_i , который остается постоянным в интервале $[\bar{y}_i, \infty)$. Считается, что функции C_i и B_i дважды дифференцируемы, и выполняются следующие условия:

$$C'_i(x_i) > 0, \quad C''_i(x_i) \geq 0 \quad (x_i \geq 0),$$

$$B'_i(y_i) > 0, \quad B''_i(y_i) < 0 \quad (0 \leq y_i < \bar{y}_i), \quad B'_i(y_i) = 0, \quad (y_i \geq \bar{y}_i).$$

В силу этих условий функции полезности w_i являются строго вогнутыми функциями.

Процесс нахождения вектора снижения эмиссий x представляется как некооперативная игра с участием n -игроков (см. [24, 137, 152]). Допустимые стратегии игрока i идентифицируются снижением эмиссий $x_i \geq 0$. Предполагается, что при торговле снижениями эмиссий (на международных переговорах) делегат от страны i полностью информирован о матрице коэффициентов трансграничного переноса

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

а также о функции полезности w_i страны, которую он представляет. Можно полагать, что он не имеет информации о функциях полезности других стран.

Модель специфицируется для игровой ситуации между странами Восточной Европы и странами бывшего Советского Союза. Для них идентифицированы квадратичные [153] функции затрат

$$C_1(x_1) = \frac{e_1}{2}x_1^2 + c_1,$$

$$C_2(x_2) = \frac{e_2}{2}x_2^2 + c_2,$$

и логарифмические [216] функции экологического эффекта

$$B_1(x_1, x_2) = d_1 \ln(a_{11}x_1 + a_{21}x_2),$$

$$B_2(x_1, x_2) = d_2 \ln(a_{12}x_1 + a_{22}x_2).$$

Без ограничения общности рассуждений можно считать, что свободные члены функций затрат равны нулю

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0.$$

Коэффициенты при квадратичных членах в функциях затрат имеют значения

$$e_1 = 0.15, \quad e_2 = 0.0042.$$

Такая разница в значениях коэффициентов функций затрат объясняется тем, что в странах Европейского Союза снижение эмиссий более затратно, чем в странах бывшего Советского Союза.

Коэффициенты для функций экологического эффекта имеют значения

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 1.$$

Равное значение этих коэффициентов показывает, что все страны одинаково заинтересованы в улучшении экологической обстановки в результате снижения эмиссий.

Для случая снижения эмиссий углекислого газа (CO_2) транспортные коэффициенты можно считать единичными: $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 1$, так что матрица транспортных коэффициентов (1.2) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Пользуясь соотношением (1.1), представим полученные функции полезности для этих стран (w_1, w_2) в виде

$$\begin{aligned} w_1(x_1, x_2) &= -\frac{e_1}{2}x_1^2 - c_1 + d_1 \ln(a_{11}x_1 + a_{21}x_2) = \\ &= -0.075x_1^2 + \ln(x_1 + x_2), \\ w_2(x_1, x_2) &= -\frac{e_2}{2}x_2^2 - c_2 + d_2 \ln(a_{12}x_1 + a_{22}x_2) = \\ &= -0.0021x_2^2 + \ln(x_1 + x_2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. Равновесие по Нэшу

Напомним определение равновесия по Нэшу.

Определение 2.1. Вектор снижения эмиссий $x^N = (x_1^N, \dots, x_n^N)$ является равновесием по Нэшу, если для него выполняется система равновесных условий

$$\begin{aligned} \max_{x_i \geq 0} w_i(x_1^N, \dots, x_i, \dots, x_n^N) &= w_i(x_1^N, \dots, x_i^N, \dots, x_n^N), \\ i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Так как функции w_i строго вогнуты, отношения (2.5) эквивалентны тому, что все частные производные $\frac{\partial w_i(x^N)}{\partial x_i}$ в равновесии должны быть равны 0:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(x^N) = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Более точно, точка x^N является решением системы уравнений

$$-C'_i(x_i) + a_{ii}B'_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j\right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Согласно соотношениям (1.4) конкурентное равновесие по Нэшу определяется системой уравнений

$$\begin{cases} -e_1x_1 + d_1 \frac{1}{(a_{11}x_1 + a_{21}x_2)} a_{11} = 0, \\ -e_2x_2 + d_2 \frac{1}{(a_{12}x_1 + a_{22}x_2)} a_{22} = 0. \end{cases}$$

После приведения к общему знаменателю имеем

$$\begin{cases} -e_1a_{11}x_1^2 - e_1a_{21}x_1x_2 + d_1a_{11} = 0, \\ -e_2a_{12}x_1x_2 - e_2a_{22}x_2^2 + d_2a_{22} = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

После домножения уравнений на соответствующие коэффициенты получаем

$$\begin{cases} -e_1e_2a_{11}a_{12}x_1^2 - e_1e_2a_{21}a_{12}x_1x_2 + d_1e_2a_{11}a_{12} = 0, \\ -e_1e_2a_{21}a_{12}x_1x_2 - e_1e_2a_{21}a_{22}x_2^2 + d_2e_1a_{21}a_{22} = 0. \end{cases}$$

Операция вычитания уравнений приводит подобные

$$-e_1e_2a_{11}a_{12}x_1^2 + d_1e_2a_{11}a_{12} + e_1e_2a_{21}a_{22}x_2^2 - d_2e_1a_{21}a_{22} = 0.$$

Исключаем переменную x_1

$$x_1^2 = \frac{e_1e_2a_{21}a_{22}x_2^2 + d_1e_2a_{11}a_{12} - d_2e_1a_{21}a_{22}}{e_1e_2a_{11}a_{12}}.$$

Почленное деление дает

$$x_1^2 = \frac{a_{21}a_{22}}{a_{11}a_{12}}x_2^2 + \frac{d_1}{e_1} - \frac{d_2a_{21}a_{22}}{e_2a_{11}a_{12}}. \quad (2.7)$$

Подставив значение x_1^2 из (2.7) в первое уравнение системы (2.6), получим после сокращения подобных

$$-\frac{e_1 a_{21} a_{22}}{a_{12}} x_2^2 + \frac{e_1 d_2 a_{21} a_{22}}{e_2 a_{12}} = e_1 a_{21} x_1 x_2. \quad (2.8)$$

Введем обозначения

$$A = \frac{e_1 a_{21} a_{22}}{a_{12}}, \quad (2.9)$$

$$B = \frac{e_1 d_2 a_{21} a_{22}}{e_2 a_{12}}, \quad (2.10)$$

$$C = e_1 a_{21}. \quad (2.11)$$

Тогда из (2.8) имеем соотношение

$$-Ax_2^2 + B = Cx_1 x_2.$$

После возведения в квадрат имеем

$$A^2 x_2^4 + B^2 - 2ABx_2^2 = C^2 x_1^2 x_2^2. \quad (2.12)$$

Подставив значение x_1^2 из (2.7) в соотношение (2.12), получим уравнение относительно x_2 :

$$A^2 x_2^4 - 2ABx_2^2 + B^2 = C^2 \frac{a_{21} a_{22}}{a_{11} a_{12}} x_2^4 + C^2 \frac{d_1}{e_1} x_2^2 - C^2 \frac{d_2 a_{21} a_{22}}{e_2 a_{11} a_{12}} x_2^2.$$

После группировки слагаемых имеем

$$\left(A^2 - C^2 \frac{a_{21} a_{22}}{a_{11} a_{12}}\right) x_2^4 - \left(2AB + C^2 \frac{d_1}{e_1} - C^2 \frac{d_2 a_{21} a_{22}}{e_2 a_{11} a_{12}}\right) x_2^2 + B^2 = 0. \quad (2.13)$$

Подставив значения A, B, C из (2.9) - (2.11) в соотношение (2.13), получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e_1 a_{21}}{a_{12}}\right)^2 \frac{a_{22}}{a_{21}} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) x_2^4 - \\ & - \frac{e_1 a_{21}^2}{e_2 a_{11} a_{12}^2} \left(e_1 a_{22} d_2 (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) + a_{11} (e_1 a_{22}^2 d_2 + e_2 a_{12}^2 d_1)\right) x_2^2 + \\ & + \left(\frac{e_1 d_2 a_{21} a_{22}}{e_2 a_{12}}\right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Учитывая, что транспортные коэффициенты a_{ij} , $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ задаются матрицей (1.3), перепишем соотношение (2.14) в виде

$$\left(\frac{e_1}{e_2} (e_1 d_2 + e_2 d_1)\right) x_2^2 - \left(\frac{e_1 d_2}{e_2}\right)^2 = 0.$$

Окончательно получаем решение для x_2

$$x_2^2 = \frac{e_1 d_2^2}{e_2(e_1 d_2 + e_2 d_2)}.$$

Аналогично получается решение для x_1

$$x_1^2 = \frac{e_2 d_1^2}{e_1(e_1 d_2 + e_1 d_2)}.$$

Нас интересует только положительные корни. В таком случае точка равновесия по Нэшу имеет координаты

$$\begin{aligned} x_1^N &= d_1 \left(\frac{e_2}{e_1(e_1 d_2 + e_2 d_1)} \right)^{1/2}, \\ x_2^N &= d_2 \left(\frac{e_1}{e_2(e_1 d_2 + e_2 d_1)} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Программа MATLAB выдает следующие значения для корней x_1, x_2

$$\begin{aligned} x_1^N &= 0.4261, \\ x_2^N &= 15.2187. \end{aligned} \tag{2.15}$$

3. Множество точек максимума по Парето

Определение 3.1. Вектор $x^P = (x_1^P, \dots, x_n^P)$ называется максимумом Парето, если для любого другого вектора $x \neq x^P$ найдется компонента j , для которой $w_j(x) < w_j(x^P)$.

По теореме Гермейера (см. [27]) для строго вогнутых функций w_i множество точек Парето совпадает с множеством всех решений параметрического семейства задач максимизации

$$\text{maximize } w(x, \alpha), \quad x_i \geq 0, \tag{3.16}$$

где символ $w(x, \alpha)$ обозначает функцию свертки:

$$w(x, \alpha) = w(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k w_k(x).$$

Коэффициенты свертки α должны быть неотрицательными, т. е.

$$\alpha_k \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n). \tag{3.17}$$

Можно также считать, что для коэффициентов свертки выполнено следующее условие:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1. \tag{3.18}$$

Согласно строгой вогнутости w_i максимизатор в (3.16) описывается уравнением

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i}(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.19)$$

Таким образом, точки Парето являются решениями серии систем уравнений (3.19) с произвольными коэффициентами свертки α_k , удовлетворяющими условиям (3.17), (3.18). Заметим, что условие (3.19) выражает тот факт, что строки матрицы Якоби

$$Dw(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial w_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial w_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial w_2(x)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial w_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial w_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial w_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

линейно зависимы с коэффициентами α_k ($k = 1, \dots, n$).

Введем коэффициенты α_1 и α_2 такие, что $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$, и определим функцию свертки

$$w(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 w_1(x_1, x_2) + \alpha_2 w_2(x_1, x_2).$$

Согласно соотношениям (1.4) имеем

$$\begin{aligned} & w(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = \\ & = \alpha_1 \left(-\frac{e_1}{2} x_1^2 - c_1 + d_1 \ln(x_1 + x_2) \right) + \alpha_2 \left(-\frac{e_2}{2} x_1^2 - c_2 + d_1 \ln(x_1 + x_2) \right). \end{aligned}$$

Согласно определению 3.1 множество точек максимума Парето можно представить в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x_2}(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(x_1^P, x_2^P) + \alpha_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_1}(x_1^P, x_2^P) = 0, \\ \alpha_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_2}(x_1^P, x_2^P) + \alpha_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(x_1^P, x_2^P) = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Подставляя выражения для производных, получим

$$\begin{cases} -\alpha_1 e_1 x_1 + \alpha_1 d_1 \frac{1}{(x_1 + x_2)} + \alpha_2 d_2 \frac{1}{(x_1 + x_2)} = 0, \\ -\alpha_2 e_2 x_2 + \alpha_1 d_1 \frac{1}{(x_1 + x_2)} + \alpha_2 d_2 \frac{1}{(x_1 + x_2)} = 0. \end{cases}$$

Приведение подобных дает соотношение

$$\alpha_1 e_1 x_1 = \alpha_2 e_2 x_2.$$

Имеем следующую пропорцию

$$x_1 = \frac{\alpha_2 e_2}{\alpha_1 e_1} x_2.$$

Исключение одной из переменных влечет

$$-\alpha_1 e_1 \frac{\alpha_2 e_2}{\alpha_1 e_1} x_2 + \alpha_1 d_1 \frac{1}{\left(\frac{\alpha_2 e_2}{\alpha_1 e_1} x_2 + x_2\right)} + \alpha_2 d_2 \frac{1}{\left(\frac{\alpha_2 e_2}{\alpha_1 e_1} x_2 + x_2\right)} = 0.$$

Сокращение подобных дает

$$-\alpha_2 e_2 x_2 + \frac{\alpha_1 d_1 \alpha_1 e_1}{(\alpha_2 e_2 + \alpha_1 e_1) x_2} + \frac{\alpha_2 d_2 \alpha_1 e_1}{(\alpha_2 e_2 + \alpha_1 e_1) x_2} = 0.$$

После приведения к общему знаменателю имеем соотношение

$$\alpha_2 e_2 (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) x_2^2 = \alpha_1 e_1 (\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2).$$

В результате получим решение для одной из координат

$$x_2^2 = \frac{\alpha_1 e_1 (\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2)}{\alpha_2 e_2 (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)}.$$

Пусть $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1 - \alpha$. Тогда

$$x_2^2 = \frac{\alpha e_1 (\alpha d_1 + (1 - \alpha) d_2)}{(1 - \alpha) e_2 (\alpha e_1 + (1 - \alpha) e_2)}.$$

Приведение подобных влечет выражение для квадрата второй координаты

$$x_2^2 = \frac{\alpha e_1}{(1 - \alpha) e_2} \frac{d_2 + \alpha (d_1 - d_2)}{e_2 + \alpha (e_1 - e_2)}.$$

Условие пропорциональности

$$x_1^2 = \frac{\alpha_2^2 e_2^2}{\alpha_1^2 e_1^2} x_2^2$$

дает выражение для квадрата первой координаты

$$x_1^2 = \frac{(1-\alpha)^2 e_2^2}{\alpha^2 e_1^2} \left(\frac{\alpha e_1}{(1-\alpha)e_2} \frac{d_2 + \alpha(d_1 - d_2)}{e_2 + \alpha(e_1 - e_2)} \right).$$

Таким образом, решением системы уравнений (3.21) является множество точек максимума Парето

$$\begin{cases} x_1^P(\alpha) = \left(\frac{(1-\alpha)e_2(d_2 + \alpha(d_1 - d_2))}{\alpha e_1(e_2 + \alpha(e_1 - e_2))} \right)^{1/2}, \\ x_2^P(\alpha) = \left(\frac{\alpha e_1(d_2 + \alpha(d_1 - d_2))}{(1-\alpha)e_2(e_2 + \alpha(e_1 - e_2))} \right)^{1/2}, \end{cases}$$

параметризованное коэффициентом α , $0 \leq \alpha \leq 1$.

4. Доминирование точек максимума Парето над равновесием по Нэшу

Этот параграф посвящен доказательству существования точек максимума Парето, которые строго доминируют точку равновесия по Нэшу по векторному критерию. Этот результат необходим для того, чтобы показать возможность сдвига от положения равновесия по Нэшу в более благоприятное положение некоторых точек максимума по Парето.

Для установления этого факта покажем, что на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ существуют значения коэффициента α , при которых совместна система неравенств

$$\begin{cases} x_1^P(\alpha) > x_1^N, \\ x_2^P(\alpha) > x_2^N. \end{cases} \quad (4.23)$$

Видно, что эта система эквивалентна следующим условиям

$$\begin{cases} \frac{(1-\alpha)e_2(d_2 + \alpha(d_1 - d_2))}{\alpha e_1(e_2 + \alpha(e_1 - e_2))} > \frac{e_2 d_1^2}{e_1(e_1 d_2 + e_2 d_1)}, \\ \frac{\alpha e_1(d_2 + \alpha(d_1 - d_2))}{(1-\alpha)e_2(e_2 + \alpha(e_1 - e_2))} > \frac{e_1 d_2^2}{e_2(e_2 d_1 + e_1 d_2)}. \end{cases}$$

Коэффициенты $e_1, e_2, d_1, d_2, \alpha, (1-\alpha)$ имеют положительное значение, и, следовательно, приведение к общему знаменателю не меняет знаков неравенств

$$\begin{cases} (1-\alpha)(d_2 + \alpha(d_1 - d_2))(e_1 d_2 + e_2 d_1) > d_1^2 \alpha (e_2 + \alpha(e_1 - e_2)), \\ \alpha (d_2 + \alpha(d_1 - d_2))(e_1 d_2 + e_2 d_1) > d_2^2 (1-\alpha) (e_2 + \alpha(e_1 - e_2)). \end{cases}$$

Введем вспомогательный коэффициент $A = e_1d_2 + e_2d_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} (d_1^2(e_1 - e_2) + A(d_1 - d_2) + A(d_1 - d_2))\alpha^2 + \\ \quad + (d_1^2e_2 - A(d_1 - 2d_2))\alpha - Ad_2 < 0, \\ (e_2d_1^2 - e_2d_2^2 + e_1d_1d_2 - e_2d_1d_2)\alpha^2 + \\ \quad + (2e_2d_2^2 + e_2d_1d_2)\alpha - e_2d_2^2 > 0. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Дадим коэффициентам при α^2 обозначения a_1 для первого неравенства и a_2 для второго неравенства

$$\begin{aligned} a_1 &= e_1d_1^2 - e_1d_2^2 + e_1d_1d_2 - e_2d_1d_2, \\ a_2 &= e_2d_1^2 - e_2d_2^2 + e_1d_1d_2 - e_2d_1d_2. \end{aligned}$$

Дадим коэффициентам при α обозначения b_1 для первого неравенства и b_2 для второго неравенства

$$\begin{aligned} b_1 &= 2e_1d_2^2 + 2e_2d_1d_2 - e_1d_2d_1, \\ b_2 &= 2e_2d_2^2 + e_2d_1d_2. \end{aligned}$$

Дадим свободным членам обозначения c_1 для первого неравенства и c_2 для второго неравенства

$$\begin{aligned} c_1 &= -e_1d_2^2 - e_2d_1d_2, \\ c_2 &= -e_2d_2^2. \end{aligned}$$

Преобразуем систему неравенств (4.24) к следующему виду

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 < 0, \\ a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 > 0. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Введем обозначения для парабол

$$\begin{aligned} p_1(\alpha) &= a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1, \\ p_2(\alpha) &= a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2. \end{aligned}$$

Тогда систему неравенств (4.25) можно представить в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(\alpha) < 0, \\ p_2(\alpha) > 0. \end{array} \right.$$

Покажем, что существуют такие значения параметра α из отрезка $0 \leq \alpha \leq 1$, при которых система имеет решение. Для этого будем исследовать взаиморасположение графиков парабол.

4.1. Взаиморасположение парабол в случае $\alpha = 0, \alpha = 1$

При $\alpha = 0$ имеем

$$p_1(\alpha) |_{\alpha=0} = -(e_1 d_2 + e_2 d_1) d_2,$$

$$p_2(\alpha) |_{\alpha=0} = -e_2 d_2^2.$$

При $\alpha = 1$ имеем

$$p_1(\alpha) |_{\alpha=1} = 2e_1 d_1^2,$$

$$p_2(\alpha) |_{\alpha=1} = e_1 d_1 d_2.$$

Обе параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ имеют отрицательные значения при $\alpha = 0$ и положительные значения при $\alpha = 1$. Это означает, что на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ обе параболы пересекают ось абсцисс только один раз.

Выясним положение парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ относительно друг друга в точках $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$.

Без ограничения общности полагаем, что $e_1 > e_2$ (в противном случае, можно поменять страны местами).

Сравним значения свободных членов c_1 и c_2 при $\alpha = 0$

$$(p_1(\alpha) - p_2(\alpha)) |_{\alpha=0} = c_1 - c_2 = -(e_1 d_2^2 + e_2 d_1 d_2 + e_2 d_2^2) < 0.$$

Из этого соотношения видно, что при пересечении оси ординат парабола $p_1(\alpha)$ лежит ниже параболы $p_2(\alpha)$ при любых значениях коэффициентов.

Выясним положение парабол относительно друг друга при $\alpha = 1$

$$(p_1(\alpha) - p_2(\alpha)) |_{\alpha=1} = e_1 d_1^2 - e_2 d_1^2 + e_1 d_1 d_2.$$

Сравним значения $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ при $\alpha = 1$. Уравняем правые части

$$e_1 d_1^2 = e_2 d_1^2 + e_1 d_1 d_2.$$

Домножим обе части этого уравнения на величину $\frac{1}{e_1 d_1^2}$. Получим

$$1 = \frac{d_2}{d_1} + \frac{e_2}{e_1} = \xi + \eta.$$

Здесь введены новые переменные $\xi = \frac{d_2}{d_1}$, $\eta = \frac{e_2}{e_1}$. Отметим, что $\xi > 0$ и $0 < \eta < 1$.

Имеем три случая положения парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ при $\alpha = 1$:

1. $p_1(\alpha) < p_2(\alpha)$ при $\xi > 1 - \eta$,

2. $p_1(\alpha) = p_2(\alpha)$ при $\xi = 1 - \eta$,

3. $p_1(\alpha) > p_2(\alpha)$ при $\xi < 1 - \eta$.

4.2. Направление “рожек” для парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$

Выясним в каких случаях параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ являются восходящими или нисходящими. Для этого определим знаки у коэффициентов a_1 и a_2 . Для коэффициента a_1 имеем соотношение

$$a_1 = e_1 d_1^2 - e_1 d_2^2 + e_1 d_1 d_2 - e_2 d_1 d_2.$$

Выясним знак коэффициента a_1 относительно параметра ξ . Для этого решим квадратное уравнение

$$-e_1 \xi^2 + (e_1 - e_2) \xi + e_1 = 0.$$

Это уравнение имеет только один положительный корень

$$\xi_1 = \frac{e_1 - e_2 + ((e_1 - e_2)^2 + 4e_1^2)^{1/2}}{2e_1}.$$

Имеем

$$a_1 > 0 \text{ при } 0 \leq \xi < \xi_1,$$

$$a_1 \leq 0 \text{ при } \xi \geq \xi_1.$$

Для коэффициента a_2 имеем выражение

$$a_2 = e_2 d_1^2 - e_2 d_2^2 + e_1 d_1 d_2 + e_2 d_1 d_2.$$

Выясним знак коэффициента a_2 относительно параметра ξ . Для этого решим квадратное уравнение

$$-e_1 \xi^2 + (e_1 - e_2) \xi + e_1 = 0.$$

Это уравнение имеет только один положительный корень

$$\xi_2 = \frac{e_1 - e_2 + ((e_1 - e_2)^2 + 4e_2^2)^{1/2}}{2e_2}.$$

Имеем

$$a_2 > 0 \text{ при } 0 \leq \xi < \xi_2,$$

$$a_2 \leq 0 \text{ при } \xi \geq \xi_2.$$

Обе параболы $a_1(\xi)$ и $a_2(\xi)$ являются нисходящими. Нетрудно также показать, что они пересекаются в точке $\xi = 1$. Следовательно, при условии, что $e_1 > e_2$, имеем $\xi_2 > \xi_1 > 1$ (см рисунок). Зависимость значения коэффициентов a_1 и a_2 от параметра ξ представлена на рис. 1.

a_1, a_2

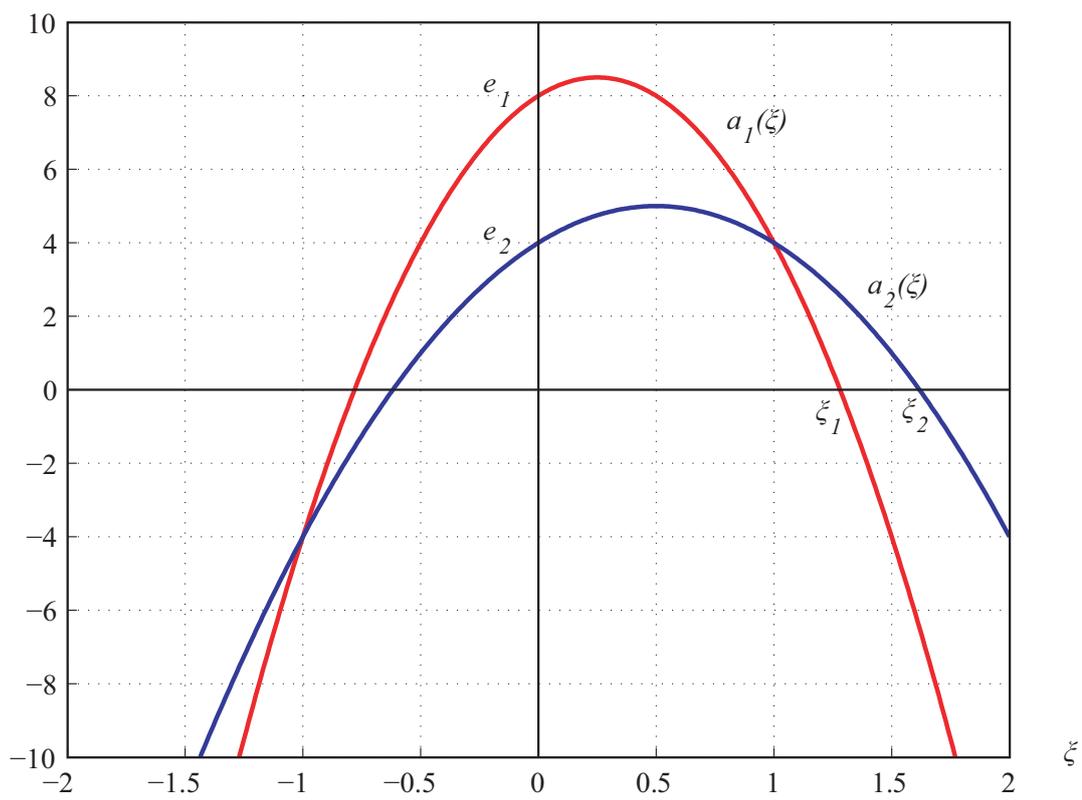


Рис. 1. Зависимость значения коэффициентов a_1 и a_2 от параметра ξ .

Имеем четыре случая для значений коэффициентов a_1 и a_2 :

1. $a_1 > 0, a_2 > 0$ при $0 \leq \xi < \xi_1$,
2. $a_1 < 0, a_2 > 0$ при $\xi_1 < \xi < \xi_2$,
3. $a_1 < 0, a_2 < 0$ при $\xi > \xi_2$,
4. $a_1 > 0, a_2 < 0$ при $\xi > \xi_2$ и $\xi < \xi_1$.

Отметим, что случай 4 нас не интересует, так как $\xi_2 > \xi_1$.

4.3. Анализ ситуаций пересечения парабол

Чтобы выяснить, есть ли у парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ точки пересечения на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$, рассмотрим их разность

$$p_3(\alpha) = (1 - \eta)(1 - \xi^2)\alpha^2 + (1 - \eta)(2\xi^2 - \xi)\alpha - ((1 - \eta)\xi^2 + \xi\eta). \quad (4.26)$$

Выясним, сколько пересечений с осью абсцисс имеет данная парабола на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$. Столько же пересечений друг с другом имеют на этом отрезке параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$. Вычислим значение параболы p_3 при $\alpha = 0$

$$p_3(\alpha) |_{\alpha=0} = -((1 - \eta)\xi^2 + \xi\eta).$$

Так как $\eta < 1$, то при $\alpha = 0$ для всех ξ имеем один случай

$$p_3(\alpha) |_{\alpha=0} < 0$$

При $\alpha = 1$ имеем

$$p_3(\alpha) |_{\alpha=1} = 1 - \eta - \xi.$$

При $\alpha = 1$ возникают 4 случая:

1. $p_3(\alpha) |_{\alpha=1} > 0$ при $\xi < 1 - \eta$,
2. $p_3(\alpha) |_{\alpha=1} = 0$ при $\xi = 1 - \eta$,
3. $p_3(\alpha) |_{\alpha=1} < 0$ при $1 - \eta < \xi < 1$,
4. $p_3(\alpha) |_{\alpha=1} < 0$ при $1 - \eta < \xi, \quad \xi > 1$.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

1. $\xi < 1 - \eta$.

Коэффициент при α^2 из соотношения (4.26) принимает положительное значение. Следовательно, парабола $p_3(\alpha)$ является восходящей. При этом

парабола принимает следующие значения на концах отрезка $p_3(\alpha) |_{\alpha=0} < 0$ и $p_3(\alpha) |_{\alpha=1} > 0$. То есть, на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ есть только одно пересечение параболы $p_3(\alpha)$ с осью абсцисс, и, следовательно, одно пересечение парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ друг с другом. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ представлено на рис. 2.

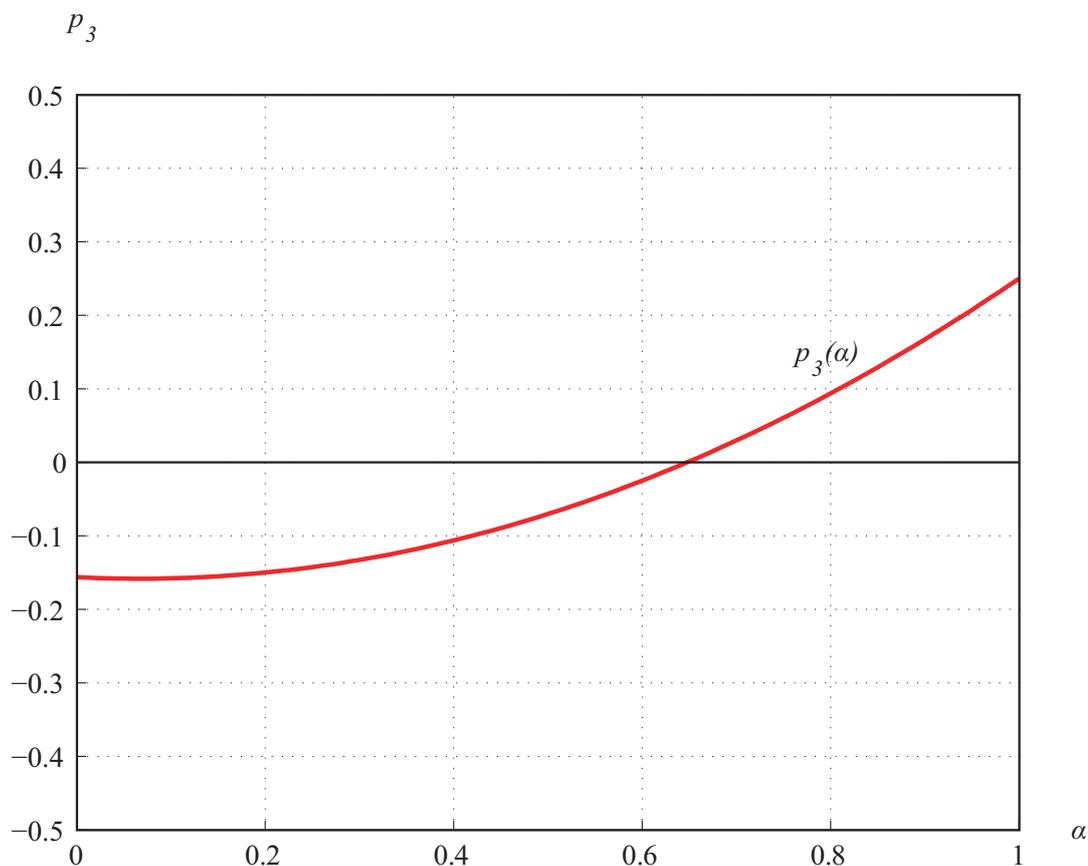


Рис. 2. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ в случае 1.

$$2. \xi = 1 - \eta.$$

Коэффициент при α^2 из соотношения (4.26) принимает положительное значение. Следовательно, парабола $p_3(\alpha)$ является восходящей. Парабола имеет следующие значения на концах отрезка $p_3(\alpha) |_{\alpha=0} < 0$ и $p_3(\alpha) |_{\alpha=1} = 0$. Таким образом, на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ есть только одно пересечение параболы $p_3(\alpha)$ с осью абсцисс при значении $\alpha = 1$, а, следовательно, одно пересечение парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ друг с другом в этой же точке. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ представлено на рис. 3.

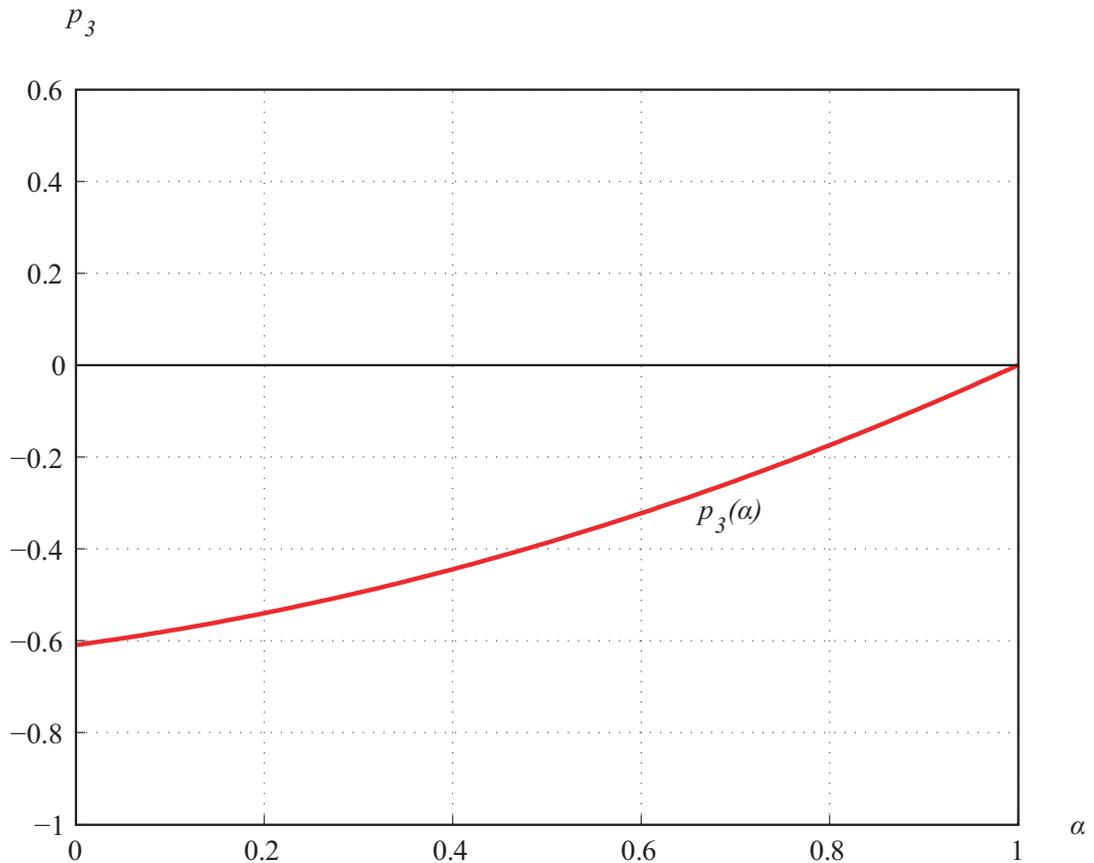


Рис. 3. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ в случае 2.

$$3. \quad 1 - \eta < \xi < 1.$$

Коэффициент при α^2 из соотношения (4.26) принимает положительное значение. Следовательно, парабола $p_3(\alpha)$ является восходящей. Значения параболы принимает одинаковый знак на концах отрезка $p_3(\alpha)|_{\alpha=0} < 0$ и $p_3(\alpha)|_{\alpha=1} < 0$. То есть на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ друг с другом не пересекаются. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ представлено на рис. 4.

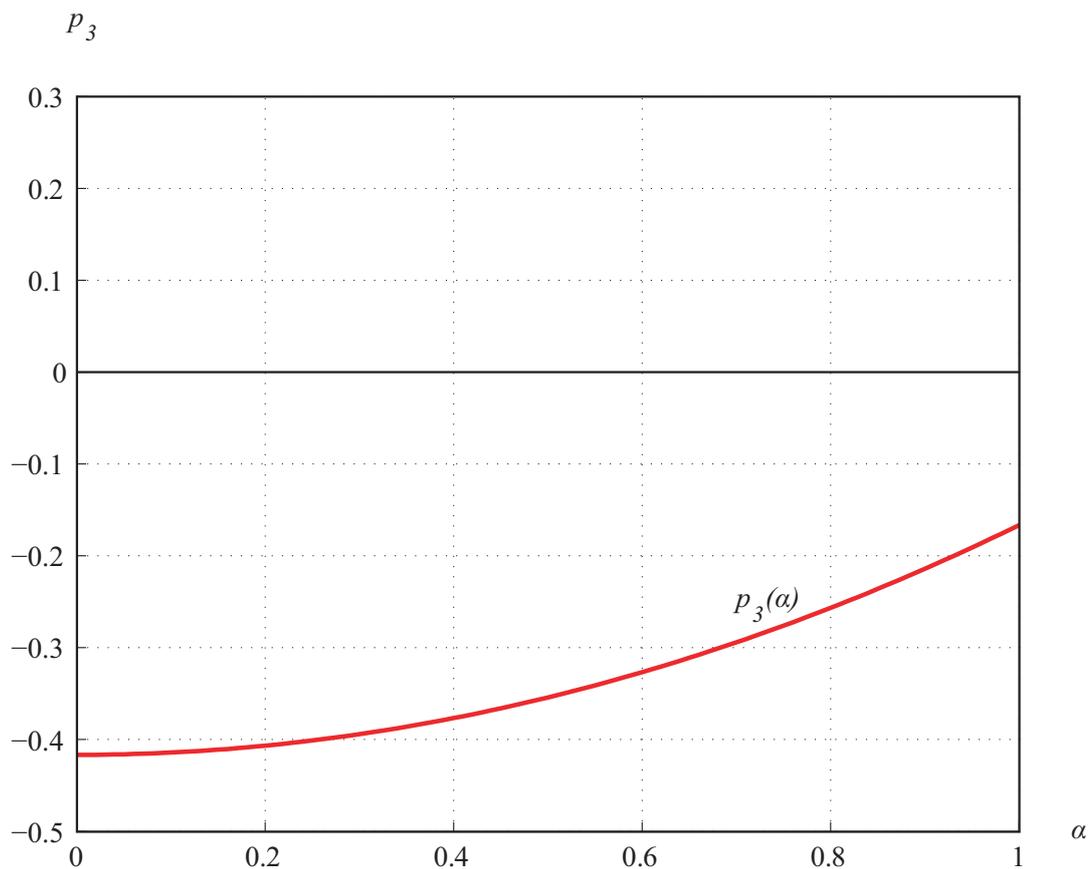


Рис. 4. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ в случае 3.

4. $\xi > 1$.

Коэффициент при α^2 из соотношения (4.26) принимает отрицательное значение. Следовательно, парабола $p_3(\alpha)$ является нисходящей. Значения параболы на концах отрезка имеют один знак $p_3(\alpha)|_{\alpha=0} < 0$ и $p_3(\alpha)|_{\alpha=1} < 0$. Необходимо выяснить, сколько пересечений с осью абсцисс имеет парабола $p_3(\alpha)$ на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$.

Покажем, что парабола $p_3(\alpha)$ на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ точек пересечения с осью абсцисс не имеет. Найдем точку максимума параболы. Для этого вычислим производную $p_3'(\alpha)$ и приравняем ее к нулю

$$p_3'(\alpha) = 2(1 - \eta)(1 - \xi^2)\alpha + (1 - \eta)(2\xi^2 - \xi) = 0.$$

Получим значение для точки максимума

$$\alpha^* = \frac{(\xi - 2\xi^2)}{2(1 - \xi^2)}.$$

Рассмотрим 2 случая.

4.1. $1 < \xi \leq 2$.

В этом случае точка максимума $\alpha^* \geq 1$. Значения параболы на концах отрезка отрицательны. Очевидно, что парабола $p_3(\alpha)$ на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ лежит ниже оси абсцисс.

4.2. $\xi > 2$.

В этом случае точка максимума α^* находится в рассматриваемом интервале $0 < \alpha^* < 1$. Покажем, что парабола p_3 имеет отрицательное значение в точке максимума. Это будет означать, что на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ пересечения парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ отсутствуют. Для этого подставим значение точки максимума в соотношение для параболы $p_3(\alpha)$ и покажем, что значение максимума отрицательное. Имеем

$$p_3(\alpha^*) = \frac{x(-4x^2 + 5(1 - y)x + 4y)}{4(x^2 - 1)}.$$

Проведем анализ знаков сомножителей в этом выражении. Знаменатель дроби имеет положительный знак, так как $\xi > 2$. Числитель $\xi(-4\xi^2 + 5(1 - \eta)\xi + 4\eta)$ принимает отрицательное значение при

$$\xi > \frac{5(1 - \eta) + (25(1 - \eta)^2 + 64\eta)^{1/2}}{8}.$$

В рассматриваемом случае парабола $p_3(\alpha^*)$ принимает отрицательное значение, когда выполняется условие

$$\frac{5(1 - \eta) + (25(1 - \eta)^2 + 64\eta)^{1/2}}{8} < 2.$$

Решая это неравенство, имеем

$$(25(1 - \eta)^2 + 64\eta)^{1/2} < 16 - 5(1 - \eta).$$

Возведем обе стороны неравенства в квадрат

$$25(1 - \eta)^2 + 64\eta < 256 - 160(1 - \eta) + 25(1 - \eta)^2.$$

Получаем

$$64\eta < 256 - 160 + 160\eta.$$

Приведение подобных влечет неравенство

$$\eta > -1,$$

которое в нашем случае верно. Следовательно наше предположение о том, что значение параболы $p_3(\alpha)$ в точке максимума отрицательно также верно.

Можно заключить, что при $\xi > 1$ параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ друг с другом не пересекаются. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ представлено на рис. 5.

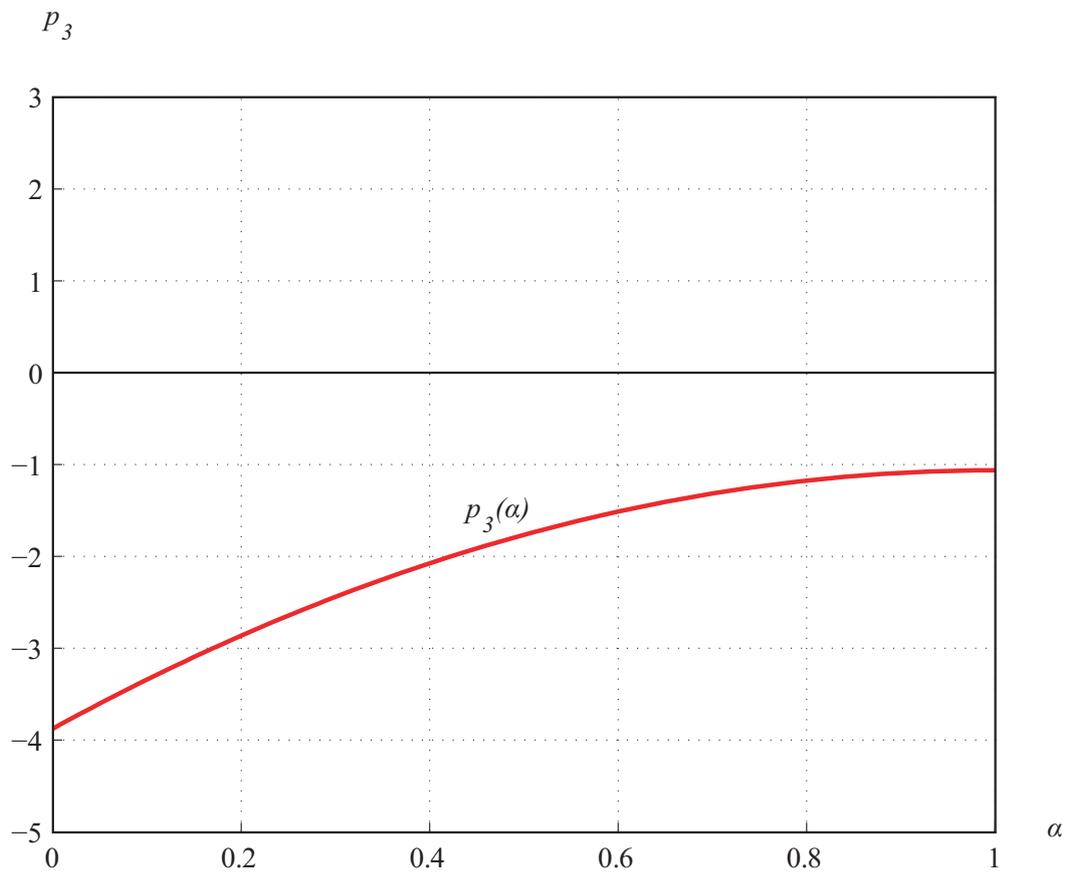


Рис. 5. Характерное расположение параболы $p_3(\alpha)$ в случае 4.

4.4. Решение системы неравенств

Воспользуемся результатами анализа, представленного в разделах 4.1 - 4.3, чтобы показать, что система (4.23) совместна при некоторых значениях параметра α .

Вернемся к системе неравенств

$$\begin{cases} a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 < 0, \\ a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай 1 из параграфа 4.2, при котором обе параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ восходящие. Для него имеют место условия

$$a_1 > 0, a_2 > 0 \text{ при } 0 < \xi < \xi_1.$$

Рассмотрим случай

$$1.1. \xi < 1 - \eta.$$

Для него, согласно разделам 4.1, 4.3 имеем

$$\alpha = 0 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$$

$$\alpha = 1 : p_1(\alpha) > p_2(\alpha),$$

параболы p_1 и p_2 пересекаются на отрезке $0 \leq \alpha \leq 1$ только один раз.

Этот случай удовлетворяет нас только тогда, когда корни пересечения парабол $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ с осью абсцисс расположены так, что $\alpha_1^{(1)} > \alpha_1^{(2)}$.

Докажем это. Рассмотрим две ситуации.

Ситуация 1: $\eta \geq \xi$.

Подставим значения корней и рассмотрим их разность

$$\alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)} = \frac{-2\xi - 2\eta + 1 + (5 + 4\frac{\eta}{\xi})^{1/2}}{\frac{2}{\xi} - 2\xi + 2(1 - \eta)} - \frac{-2\xi - 2 + (5 + 4\frac{\xi}{\eta})^{1/2}}{\frac{2}{\xi} - 2\xi + 2\frac{1-\eta}{\eta}}.$$

Сравним знаменатели этих дробей. Так как $0 < \eta < 1$, то

$$\frac{2(1 - \eta)}{\eta} > 2(1 - \eta).$$

Значит знаменатель первой дроби меньше знаменателя второй дроби

$$\frac{2}{\xi} - 2\xi + 2(1 - \eta) < \frac{2}{\xi} - 2\xi + \frac{2(1 - \eta)}{\eta}.$$

Покажем, что числитель первой дроби больше числителя второй дроби. Составим их разность и приведем подобные

$$3 - 2\eta + \left(5 + 4\frac{\eta}{\xi}\right)^{1/2} - \left(5 + 4\frac{\xi}{\eta}\right)^{1/2}.$$

В рассматриваемом случае выражение $3 - 2\eta > 0$. Кроме того, ясно, что при условии ситуации 1 справедливо неравенство.

$$\left(5 + 4\frac{\eta}{\xi}\right)^{1/2} > \left(5 + 4\frac{\xi}{\eta}\right)^{1/2}.$$

То есть разность числителей положительная. Имеем два соотношения: числитель первой дроби больше числителя второй дроби, а знаменатель первой дроби меньше знаменателя второй. Следовательно, значение первого корня больше значения второго корня.

Ситуация 2: $0 \leq \eta < \xi \leq 1 - \eta$.

В этом случае аналитическое доказательство является трудоемким, и может быть проведено разложением по формуле Тейлора. Приведем график двумерной функции $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$ разности корней $\alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_1^{(2)}$, построенный в программе MATLAB. График расположен на рис. 6. Из него видно, что значения этой функции строго положительны для любых значений аргументов.

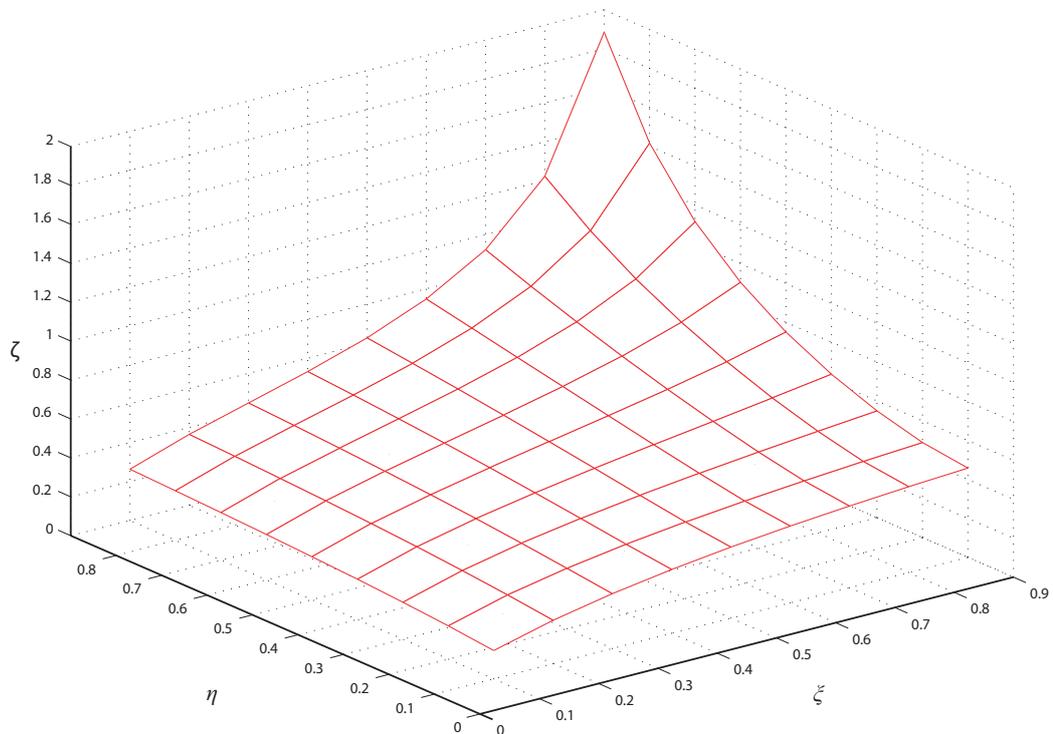


Рис. 6. График двумерной функции разности корней.

Таким образом, предположение о том, что $\alpha_1^{(1)} > \alpha_1^{(2)}$ верно. В этом случае система неравенств совместна. Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ и корней $\alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_1^{(2)}$ изображены на рис. 7.

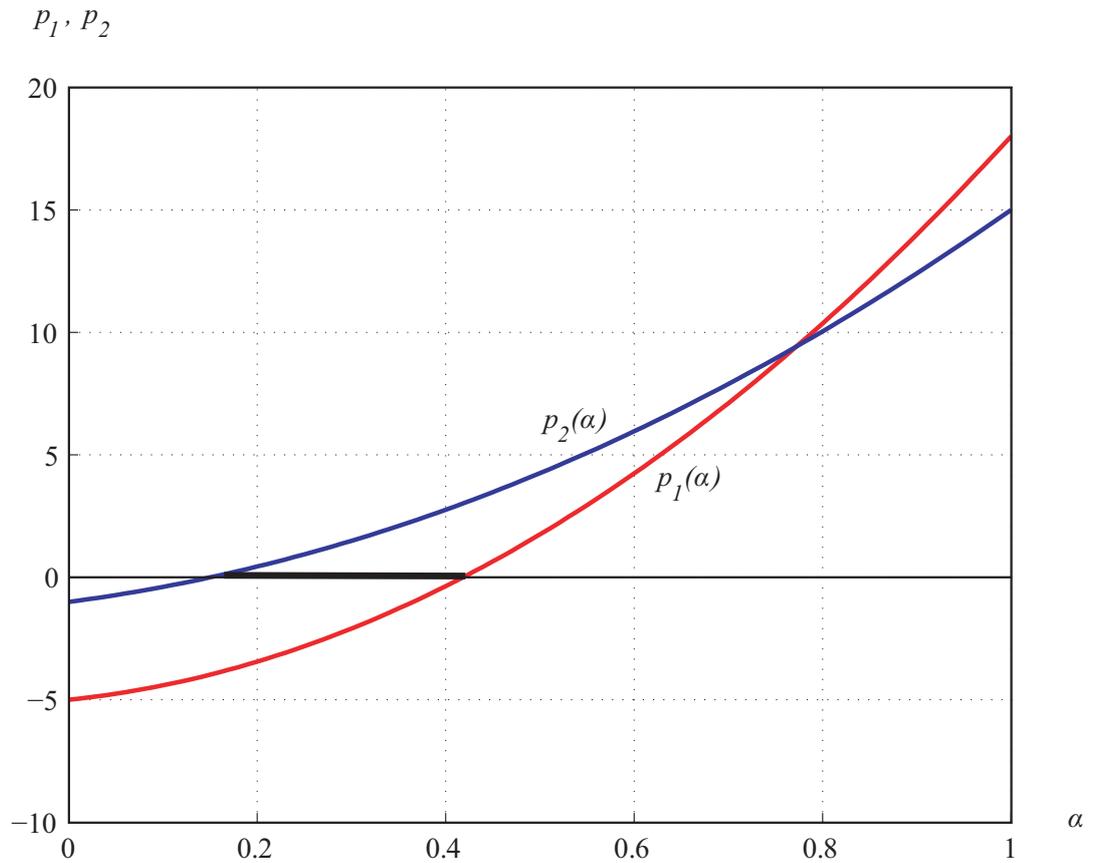


Рис. 7. Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ для случая 1.1.

Рассмотрим случай

1.2. $\xi = 1 - \eta$.

Для него, согласно разделам 4.1, 4.3 имеем

$$\alpha = 0 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$$

$$\alpha = 1 : p_1(\alpha) = p_2(\alpha),$$

параболы p_1 и p_2 пересекаются в точке $\alpha = 1$.

Видно, что в этом случае система неравенств совместна.

Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ изображено на рис. 8.

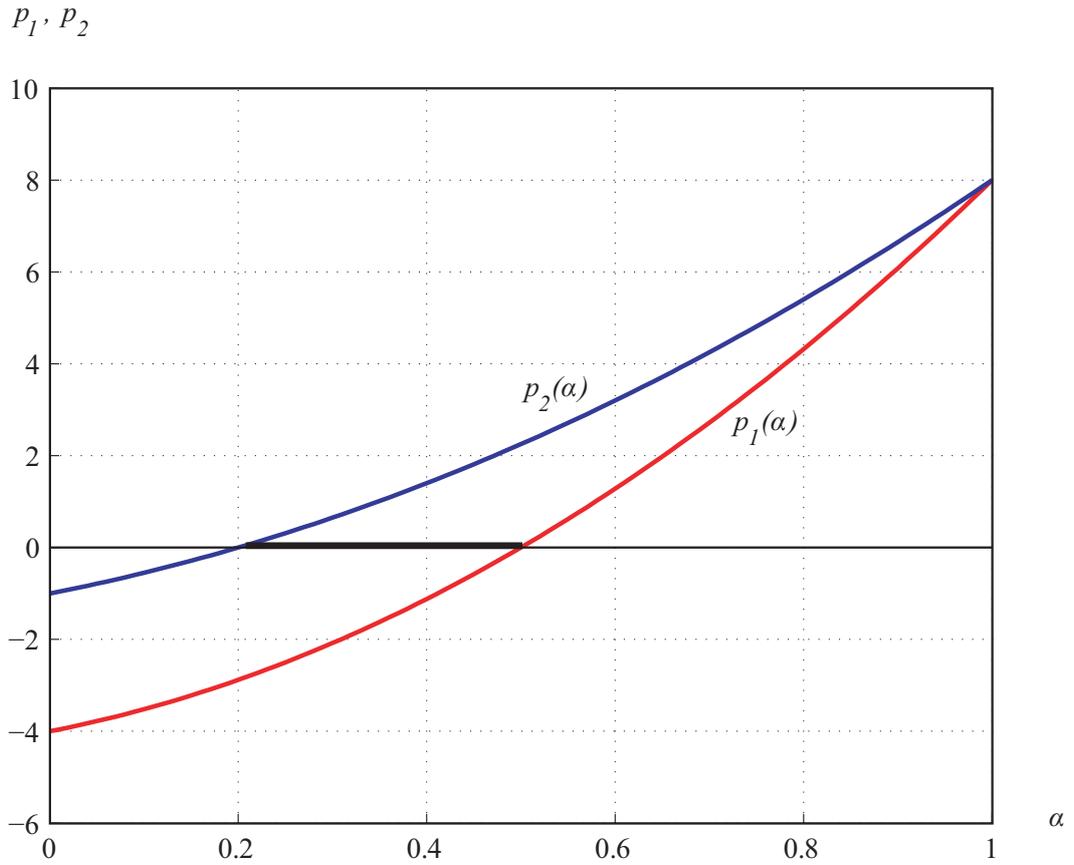


Рис. 8. Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ для случая 1.2.

Рассмотрим случай

1.3. $1 - \eta < \xi < \xi_1$.

Для него, согласно разделам 4.1, 4.3 имеем

$$\alpha = 0 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$$

$$\alpha = 1 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$$

параболы p_1 и p_2 на отрезке $0 < \alpha < 1$ не пересекаются.

Ясно, что в этом случае система неравенств совместна.

Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ изображено на рис. 9.

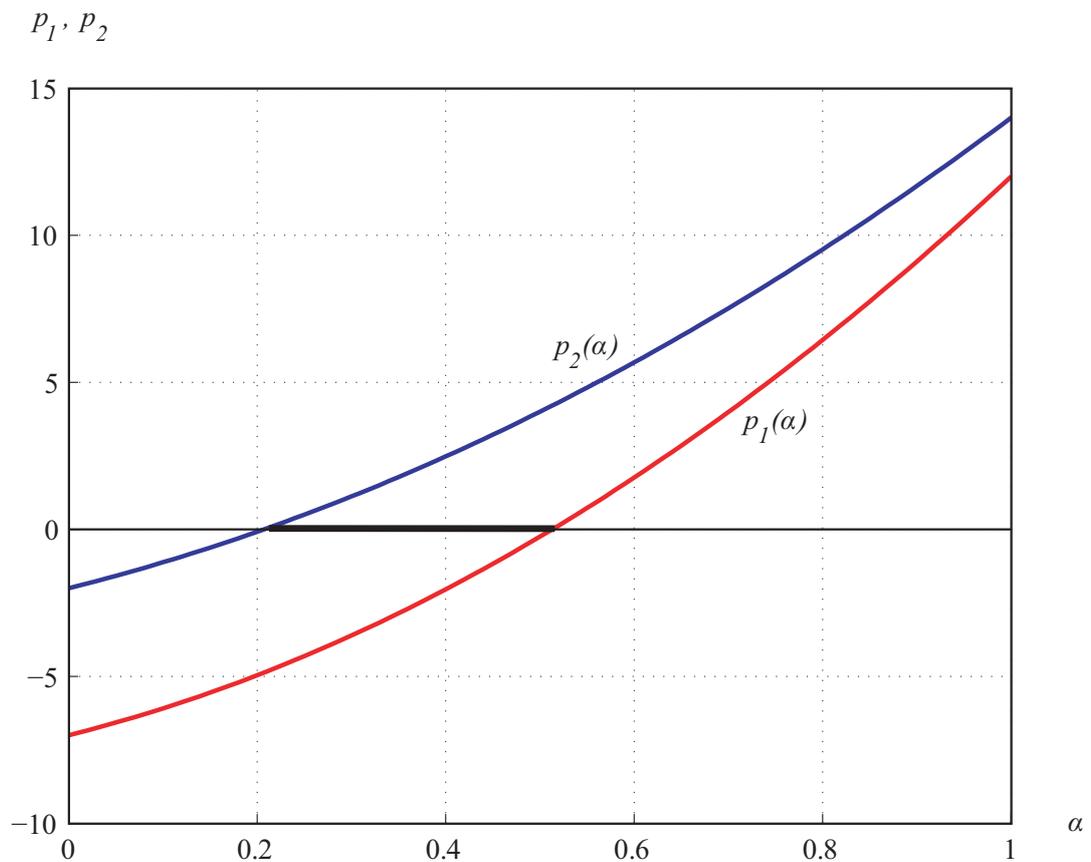


Рис. 9. Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ для случая 1.3.

Рассмотрим случай 2 из раздела 4.2, при котором парабола $p_1(\alpha)$ нисходящая, а парабола $p_2(\alpha)$ восходящая. Для него выполняются условия.

$$a_1 < 0, a_2 > 0 \text{ при } \xi_1 < \xi < \xi_2.$$

Для него, согласно разделам 5.1, 5.3, имеем

$$\alpha = 0 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$$

$$\alpha = 1 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$$

параболы p_1 и p_2 на отрезке $0 < \alpha < 1$ не пересекаются.

В этом случае система неравенств совместна.

Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ изображено на рис. 10.

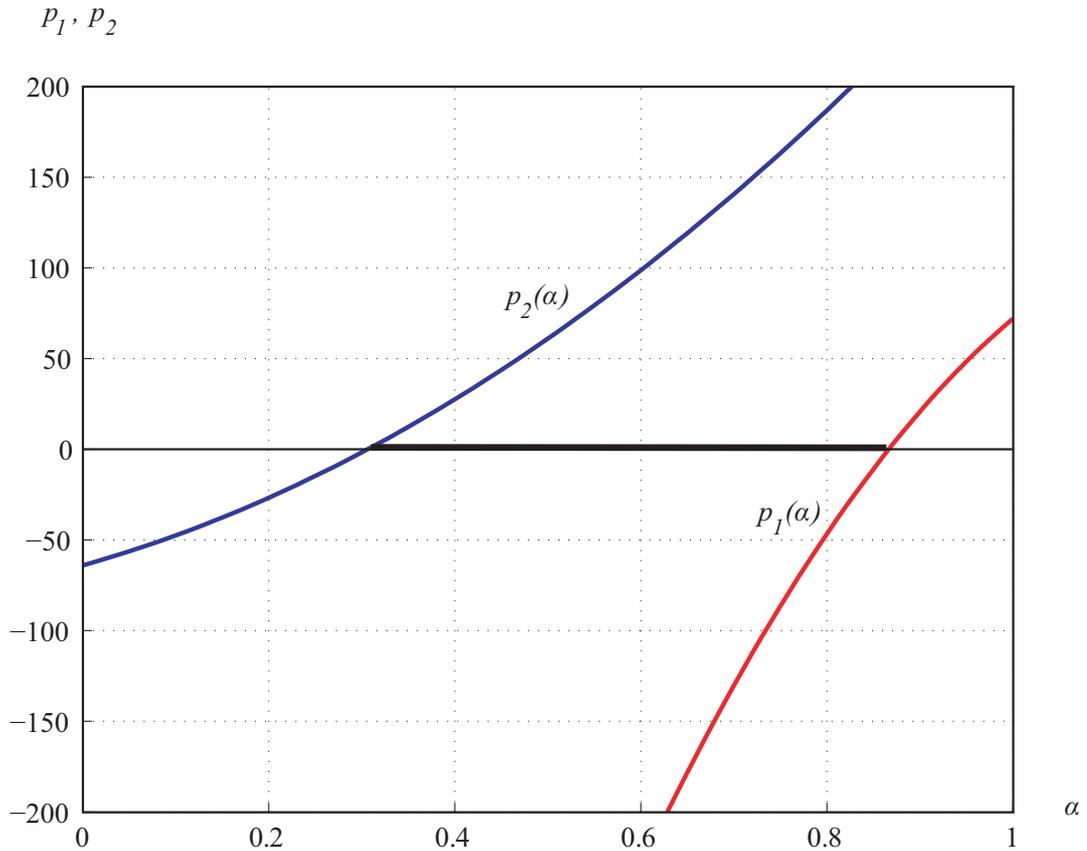


Рис. 10. Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ для случая 2.

Рассмотрим случай 3 из раздела 4.2, при котором обе параболы $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ нисходящие

$$a_1 < 0, a_2 < 0 \text{ при } \xi > \xi_2.$$

Для него, согласно разделам 4.1, 4.3, имеем

$$\alpha = 0 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$$

$$\alpha = 1 : p_1(\alpha) < p_2(\alpha),$$

параболы p_1 и p_2 на отрезке $0 < \alpha < 1$ не пересекаются.

Видно, что в этом случае система неравенств совместна.

Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ изображено на рис. 11.

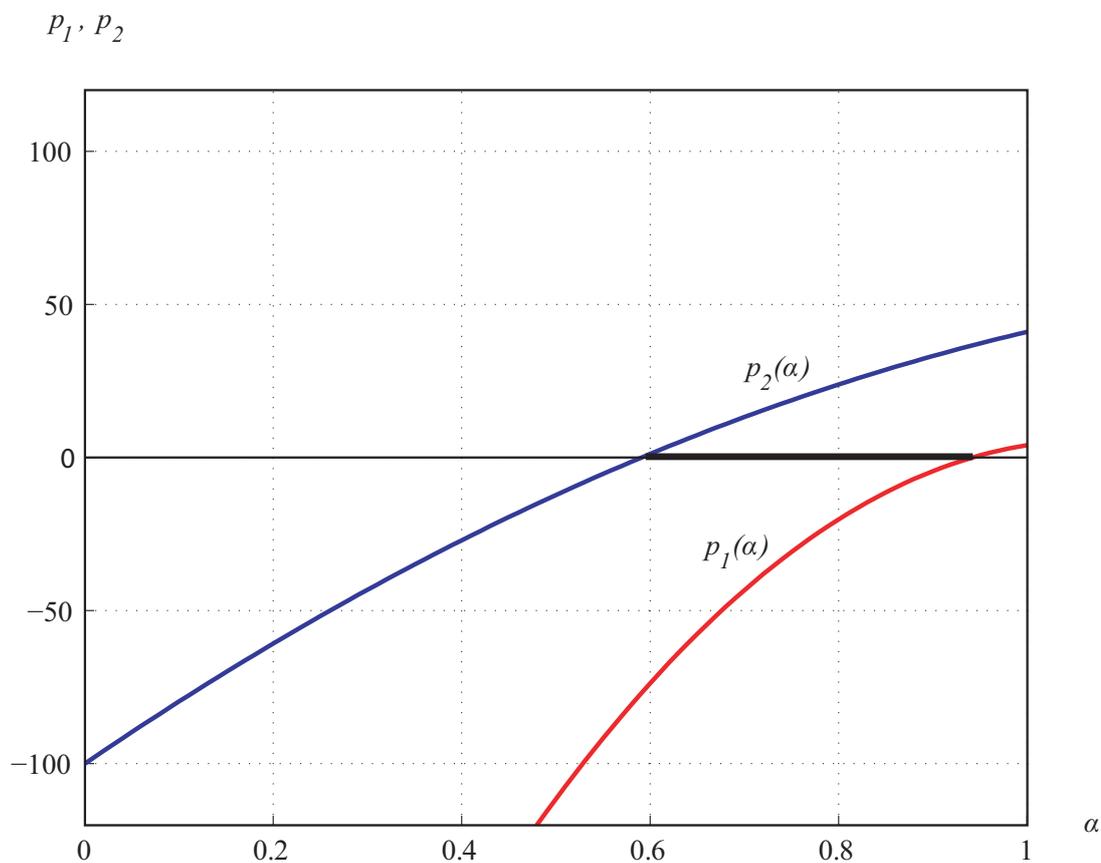


Рис. 11. Характерное расположение графиков функций $p_1(\alpha)$ и $p_2(\alpha)$ для случая 3.

Итак, во всех случаях существуют такие значения параметра $0 \leq \alpha \leq 1$, при которых система имеет решение, а значит существуют точки множества максимума по Парето, которые строго доминируют точку равновесия Нэша по обеим координатам.

На рис. 12 изображена точка равновесия по Нэшу (NE) и множество точек максимума по Парето (PM). Жирной линией выделена часть множества точек максимума по Парето, которые строго доминируют точку равновесия по Нэшу.

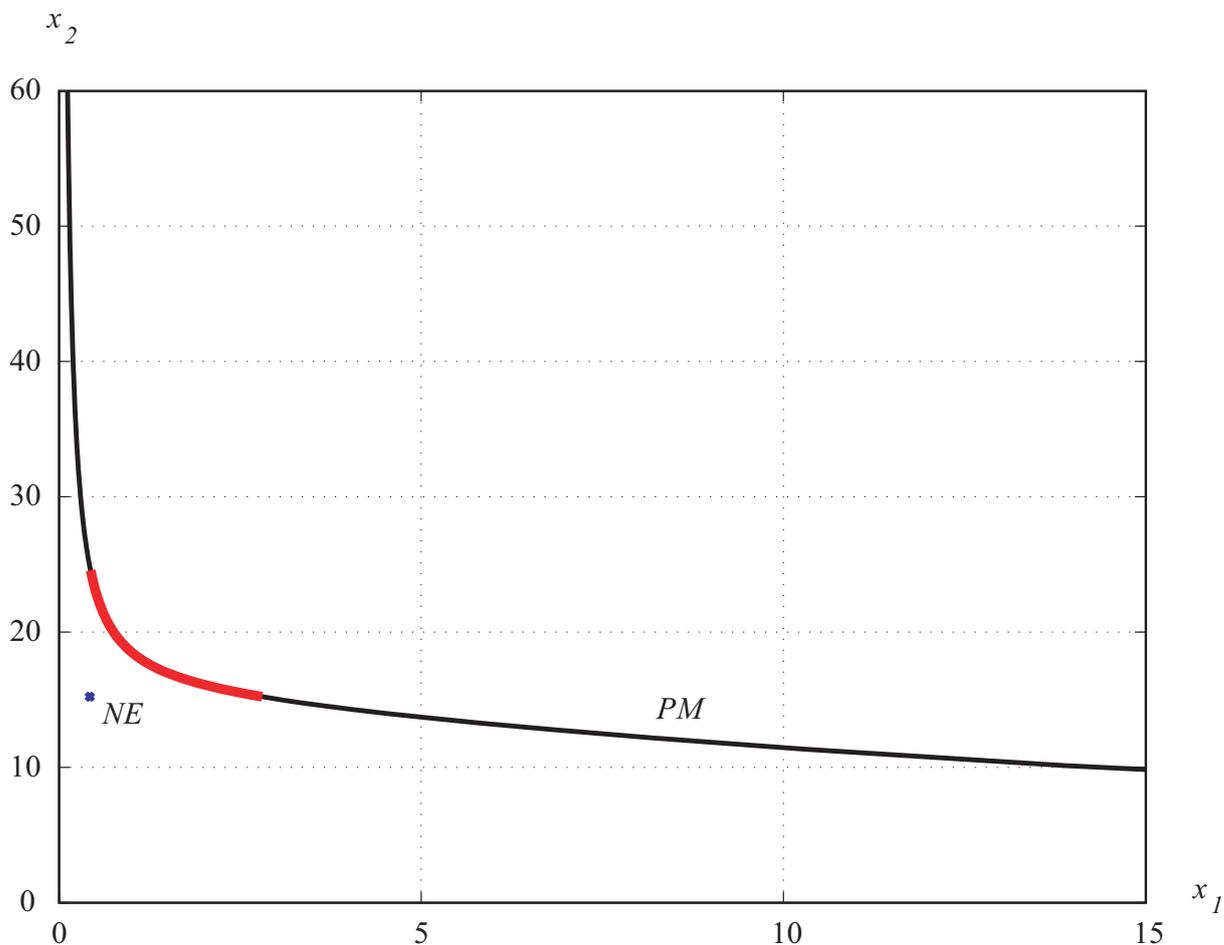


Рис. 12. Равновесие по Нэшу и множество максимумов Парето.

5. Рыночное равновесие

Определение 5.1. Назовем рыночным равновесием вектор положительного снижения эмиссий $x^M = (x_1^M, \dots, x_n^M)$, если для каждого игрока i функция $w_i(\lambda x^M)$ ($\lambda > 0$) достигает максимума при $\lambda = 1$,

$$x^M = \operatorname{argmax}\{w_i(\lambda x^M) : \lambda x^M, \lambda > 0\},$$

что эквивалентно соотношению

$$\frac{dw_i(\lambda x^M)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.27)$$

Следует сказать, что аналогичное определение дано в работе [152]. Это определение означает, что для всех игроков максимум их функций выигрыша достигается в точке рыночного равновесия x^M при поиске на направлении, порожденном этим равновесием.

Определение рыночного равновесия соединяет свойства двух предыдущих определений: равновесия по Нэшу и точек максимума Парето. Из определения равновесия по Нэшу берется структура оптимизации каждой функции в отдельности, а определение точек максимума Парето отражено в совместном направлении поиска максимума.

Отметим, что в определении рыночного равновесия можно считать, что в начало координат помещена базовая точка. Такой базовой точкой может служить текущее состояние или равновесие системы. Особое интерес представляет случай, когда эту роль играет точка равновесия по Нэшу. В этой ситуации речь идет о сдвиге системы из равновесного состояния по Нэшу в новое равновесное положение – точку рыночного равновесия. Именно такой сдвиг исследуется в рассматриваемой модели.

Отношение (5.27) показывает, что точка x^M является решением уравнений

$$\langle \nabla w_i(x), x \rangle = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (5.28)$$

где символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в n -мерном векторном пространстве.

Учитывая определение функции полезности w_i , (1.1), систему уравнений (5.28) можно представить как

$$-x_i C'_i(x_i) + \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \right) B'_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.29)$$

Уравнения (5.29) описывают множество n кривых. Они показывают количество снижения эмиссий x_i , которое желает осуществить игрок i

взамен на ответное снижение $\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j$, которое он получает благодаря снижению эмиссий всеми другими игроками. Параметр

$$p_i = p_i(x) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j}{x_i} \quad (5.30)$$

определяет *обменный курс*, вычисленный по вектору снижения эмиссий x . Он показывает количественное снижение эмиссий на собственную территорию, которое страна i получит за счет снижения собственных эмиссий на одну единицу. Используя обменный курс представим соотношения (5.29) как

$$-C'_i(x_i) + p_i B'_i(p_i x_i) = 0. \quad (5.31)$$

Вспоминая равновесие по Нэшу, имеем соотношения

$$-C'_i(x_i) + a_{ii} B'_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j\right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (5.32)$$

Используя обменный курс p_i (см. (5.30)), представим соотношения (5.32) в виде

$$-C'_i(x_i) + a_{ii} B'_i(p_i x_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (5.33)$$

которые в большей степени выглядят как уравнения рыночного равновесия (5.31). Единственное отличие состоит в том, что в уравнениях для равновесия по Нэшу (5.33) стоит транспортный коэффициент a_{ii} для собственной территории страны i , а в соотношениях для рыночного равновесия (5.31) этот коэффициент заменяется на обменный курс p_i , который учитывает интересы всех игроков.

Согласно возможности сдвига равновесия по Нэшу в начало координат, соотношение, определяющее рыночное равновесие x^M , имеет вид

$$\frac{dw_i(x^N + \lambda(x^M - x^N))}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} = 0. \quad (5.34)$$

В рассматриваемой модели исследуется игра двух участников. Введем в этой игре новые переменные y_1 и y_2 для сдвига от конкурентного равновесия по Нэшу к кооперативному рыночному равновесию:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^M = x_1^N + y_1, \\ x_2 = x_2^M = x_2^N + y_2. \end{cases} \quad (5.35)$$

Соотношение (5.34) эквивалентно системе уравнений для сдвига

$$\begin{cases} y_1 \frac{\partial w_1}{\partial y_1}(y_1, y_2) + y_2 \frac{\partial w_1}{\partial y_2}(y_1, y_2) = 0, \\ y_1 \frac{\partial w_2}{\partial y_1}(y_1, y_2) + y_2 \frac{\partial w_2}{\partial y_2}(y_1, y_2) = 0. \end{cases} \quad (5.36)$$

Пользуясь соотношениями (1.4), получаем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 \left(-e_1(x_1^N + y_1) + \frac{d_1}{x_1^N + y_1 + x_2^N + y_2} \right) + \\ \quad + y_2 \frac{d_1}{x_1^N + y_1 + x_2^N + y_2} = 0, \\ y_2 \left(-e_2(x_2^N + y_2) + \frac{d_2}{x_1^N + y_1 + x_2^N + y_2} \right) + \\ \quad + y_1 \frac{d_2}{x_1^N + y_1 + x_2^N + y_2} = 0. \end{array} \right. \quad (5.37)$$

Следует сказать, что в работе [182] получены достаточные условия существования строго положительного решения для системы уравнений рыночного равновесия. В нашей модели эти условия не выполняются для всех значений параметров. Поэтому в следующем параграфе мы получим аналитическое решение для положительных координат точки рыночного равновесия системы (5.37). Этот результат получается из нахождения корней многочлена пятой степени.

Важно подчеркнуть, что это решение является одной из точек множества максимума по Парето. Этот результат можно оформить в виде строго утверждения.

Предложение 5.1 *Строго положительное решение системы уравнений (5.37) для рыночного равновесия является одной из точек максимума Парето.*

Доказательство этого предложения можно получить из следующих фактов. Во-первых, система уравнений (5.37) означает линейную зависимость столбцов матрицы Якоби функций полезности (3.20). Но тогда линейно зависимы и строки этой матрицы. Это означает существование коэффициентов γ_1, γ_2 , одновременно не равных нулю, таких, что выполняется следующая система уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 \frac{\partial w_1}{\partial y_1}(y_1, y_2) + \gamma_2 \frac{\partial w_2}{\partial y_1}(y_1, y_2) = 0, \\ \gamma_1 \frac{\partial w_1}{\partial y_2}(y_1, y_2) + \gamma_2 \frac{\partial w_2}{\partial y_2}(y_1, y_2) = 0. \end{array} \right. \quad (5.38)$$

Эти условия близки к условиям определения точки максимума Парето (3.22). Для того, чтобы эти условия полностью совпали, необходимо, чтобы коэффициенты γ_1, γ_2 были одного знака, например, положительного. Положительность коэффициентов γ_1, γ_2 может быть получена из

следующих соображений. Очевидно, что производные $\partial w_1/\partial y_2$, $\partial w_2/\partial y_1$ строго положительны.

$$\frac{\partial w_1}{\partial y_2} = \frac{d_1}{x_1^N + y_1 + x_2^N + y_2} > 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial y_1} = \frac{d_2}{x_1^N + y_1 + x_2^N + y_2} > 0. \quad (5.39)$$

Кроме того, координаты для сдвига к рыночному равновесию строго положительны $y_1 > 0$, $y_2 > 0$. Тогда из системы (5.37) следует, что производные $\partial w_1/\partial y_1$, $\partial w_2/\partial y_2$ строго отрицательны. Подставляя эти знаки в систему (5.38), получаем, что коэффициенты γ_1 , γ_2 должны быть одного знака, например, строго положительного.

Таким образом, рыночное равновесие является одной из точек максимума Парето. Напомним, что согласно соотношению (5.31) рыночное равновесие обладает также декомпозиционным свойством равновесия по Нэшу. То есть, рыночное равновесие комбинирует кооперативные свойства точек максимума Парето и конкурентные характеристики равновесия по Нэшу.

6. Аналитический метод решения

Решая систему уравнений (5.37) аналитическим способом, имеем уравнение пятой степени для y_2 :

$$\begin{aligned}
& (e_1 e_2^2 d_2 - e_2^3 d_1) y_2^5 + \\
& + (-2Ae_2^2 + 2e_2^2 e_1 d_2 (x_1^N + x_2^N) + 2e_1 d_2 e_2^2 x_2^N - 2e_2^3 d_1 x_2^N) y_2^4 + \\
& + (-Ae_2^2 (x_1^N + x_2^N) - 4Ae_2^2 x_2^N + e_1 d_2 e_2^2 (x_1^N + x_2^N)^2 + \\
& + 4e_2^2 e_1 d_2 (x_1^N + x_2^N) x_2^N - \\
& - 2e_1 e_2 d_2^2 + e_1 d_2 e_2^2 (x_2^N)^2 + 2e_2^2 d_1 d_2 - e_2^3 d_1 (x_2^N)^2) y_2^3 + \\
& + (-2Ae_2^2 (x_1^N + x_2^N) x_2^N + 4Ae_2 d_2 - 2Ae_2^2 (x_2^N)^2 + \\
& + 2e_1 d_2 e_2^2 (x_1^N + x_2^N)^2 x_2^N - \\
& - 2e_1 e_2 d_2^2 (x_1^N + x_2^N) + 2e_2^2 e_1 d_2 (x_2^N)^2 (x_1^N + x_2^N) - \\
& - 2e_1 e_2 d_2^2 x_2^N + 2e_2^2 d_1 d_2 x_2^N) y_2^2 + \\
& + (Ad_2 e_2 (x_1^N + x_2^N) - Ae_2^2 (x_2^N + x_1^N) (x_2^N)^2 + \\
& + 4Ae_2 d_2 x_2^N + e_1 d_2 e_2^2 (x_1^N + x_2^N)^2 (x_2^N)^2 - \\
& - 2e_1 e_2 d_2^2 (x_1^N + x_2^N) x_2^N + e_1 d_2^3 - e_2 d_1 d_2^2) y_2 + \\
& + Ad_2 e_2 (x_1^N + x_2^N) x_2^N - 2Ad_2^2 = 0,
\end{aligned} \tag{6.40}$$

где $A = d_1 d_2 \left(\frac{e_1 e_2}{e_1 d_2 + e_2 d_1} \right)^{1/2}$.

Предложение 6.1 *При выполнении условий*

$$e_1 d_2 - e_2 d_1 > 0, \quad d_2 > \frac{e_2 (x_1^N + x_2^N) x_2^N}{2}, \tag{6.41}$$

многочлен (6.40) имеет хотя бы один положительный корень.

Этот факт вытекает из следующих двух обстоятельств. Во-первых, следует отметить, что свободный член этого многочлена является отрицательным числом, и, следовательно, при $y_2 = 0$ значение многочлена отрицательно. А, во-вторых, в силу положительности коэффициента при старшем члене значение многочлена стремится к $+\infty$ при стремлении аргумента y_2 к $+\infty$. Ясно, что при выполнении этих условий найдется хотя бы один положительный корень.

Отметим, что для рассматриваемых параметров модели условия Предложения 6.1 выполнено.

Для конкретных параметров решение для корней многочлена реализовано в программе MATLAB. График многочлена пятой степени (6.40) представлен на рис. 13.

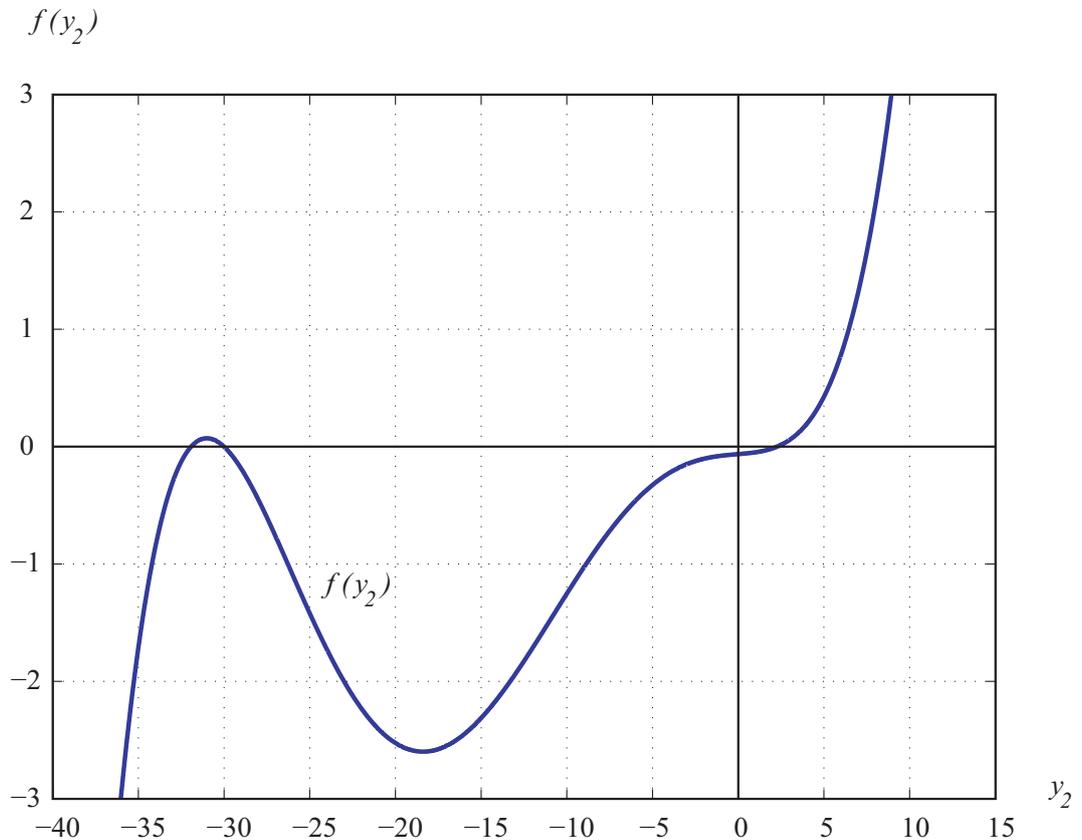


Рис. 13. График многочлена пятой степени в аналитическом решении.

Оператор определения нулей функции программы MATLAB дает следующие результаты для корней многочлена (6.40). Два корня отрицательны, два корня комплексные, и имеется единственный положительный корень со значением

$$y_2 = 2.2732.$$

Значение координаты y_1 сдвига для рыночного равновесия определяется подстановкой координаты y_2 в первое уравнение системы (5.37). В результате получается следующее значение для координаты y_1

$$y_1 = 0.8634.$$

Подстановка координат точки равновесия по Нэшу (2.15) и координат сдвига в систему уравнений (5.35) дает координаты рыночного

равновесия

$$\begin{cases} x_1^M = x_1^N + y_1 = 0.4261 + 0.8634 = 1.2895, \\ x_2^M = x_2^N + y_2 = 15.2187 + 2.2732 = 17.4919. \end{cases} \quad (6.42)$$

7. Численный метод решения

Следует отметить, что аналитическое решение задачи нахождения рыночного равновесия в общем случае является невозможным. Поэтому в этом параграфе предлагается универсальный вычислительный алгоритм поиска рыночного равновесия. Проводится сравнение результатов решения задачи аналитическим методом и методом вычислительного алгоритма.

Алгоритм представлен в виде аукционного процесса, который реализует декомпозиционную конструкцию поиска равновесия при дефиците информации. Аукционер предлагает для каждой страны обменные курсы p_i , определяющие количественное снижение эмиссий x_i на собственную территорию, которое страна i получит за счёт снижения собственных эмиссий на одну единицу. Игроки отвечают одновременно, указывая снижение эмиссий, которые они желают произвести, за предлагаемую цену p_i на основе своих линий наилучших ответов. Аукционер учитывает предложенные странами-участниками снижения эмиссий и формирует по ним новые цены. Отметим, что участники отвечают снижением эмиссий, опираясь лишь на свои функции полезности и предложенные им конфиденциальные цены.

Алгоритмы реализованы в программе MATLAB и сводятся к интегрированию нелинейных систем дифференциальных уравнений. Проведено сравнение результатов предложенных численных алгоритмов и аналитических решений. Сравнение показывает высокую точность численного метода, который дает практически идентичные результаты аналитическому решению.

Решая систему уравнений (5.36) найдем функции наилучших ответов игроков:

$$\begin{cases} y_2 = f(y_1) = y_1 \frac{e_1(x_2^N + x_1^N)(y_1 + x_1^N)}{(d_1 - e_1 y_1 (y_1 + x_1^N))} - y_1, \\ y_1 = g(y_2) = y_2 \frac{e_2(x_2^N + x_1^N)(y_2 + x_2^N)}{(d_2 - e_2 y_2 (y_2 + x_2^N))} - y_2. \end{cases}$$

Графики функций наилучших ответов игроков представлены на рис. 14.

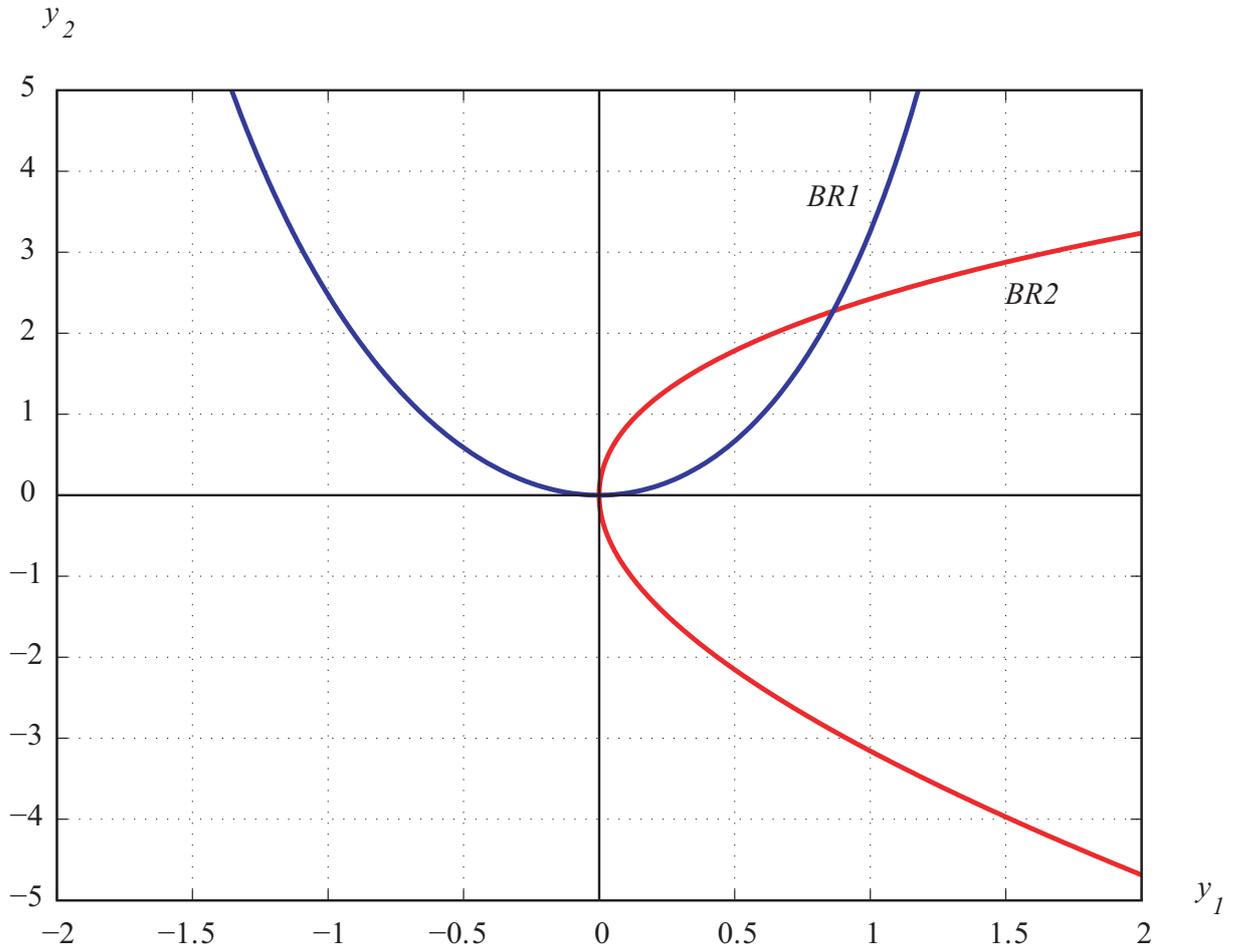


Рис. 14. Функции наилучших ответов игроков.

Представим эту систему уравнений в виде

$$\begin{cases} F(y_1, y_2) = -f(y_1) + y_2 = 0, \\ G(y_1, y_2) = y_1 - g(y_2) = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является положение рыночного равновесия (y_1^M, y_2^M) .

Определим значения наилучших ответов как решение соответствующих уравнений. Например, наилучшим ответом первого игрока на действия второго игрока назовем решение $y_1^R = y_1^R(y_2)$ уравнения наилучших ответов

$$F(y_1^R(y_2), y_2) = -f(y_1^R(y_2)) + y_2 = 0.$$

Аналогично, наилучшим ответом второго игрока на действия первого назовем решение $y_2^R = y_2^R(y_1)$

$$G(y_2^R(y_1), y_1) = -g(y_2^R(y_1)) + y_1 = 0.$$

Для нахождения положения рыночного равновесия используется ди-

намика наилучших ответов:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 + y_1^R(y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_2 + y_2^R(y_1). \end{cases} \quad (7.43)$$

Для того, чтобы сделать расчетные формулы алгоритма более конструктивными, заменим соотношения “наилучших ответов” на первую итерацию метода сжимающих отображений.

$$\begin{aligned} y_1^R(y_2) - y_1 &\approx F(y_1, y_2), \\ y_2^R(y_1) - y_2 &\approx G(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Делая соответствующую подстановку в динамике наилучших ответов, имеем

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 + y_1^R \approx F(y_1, y_2) = -f(y_1) + y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_2 + y_2^R \approx G(y_1, y_2) = y_1 - g(y_2). \end{cases}$$

Нахождение точки рыночного равновесия принимает декомпозиционный характер, когда в систему уравнений подставляются коэффициенты обменного курса p_i (см. (5.30)), которые аукционер пересчитывает на каждом шаге

$$\begin{cases} p_1 = \frac{y_1 + y_2}{y_1}, \\ p_2 = \frac{y_1 + y_2}{y_2}. \end{cases} \quad (7.44)$$

С введенными коэффициентами обменного курса система уравнений (7.43) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -f(y_1) - y_1 + p_1 y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = -g(y_2) - y_2 + p_2 y_2. \end{cases} \quad (7.45)$$

Системы уравнений аукциона (7.44) и (7.45) интегрируются совместно методом Рунге-Кутты. Разработанный алгоритм реализуется в программе, написанной в среде MATLAB. Для компьютерного эксперимента используются коэффициенты для функции затрат и функций экологического эффекта, основанные на реальных данных [153, 216]: $e_1 = 0.15$, $e_2 = 0.0042$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$.

Полученные результаты представлены на рис. 15, где показаны ситуация равновесия по Нэшу (NE), множество точек максимума по Парето (PM), линии реакции конкурентов (BR_1 и BR_2), точка рыночного равновесия в их пересечении (ME), начальная точка (IP) и траектория алгоритма (TA), сходящаяся к рыночному равновесию.

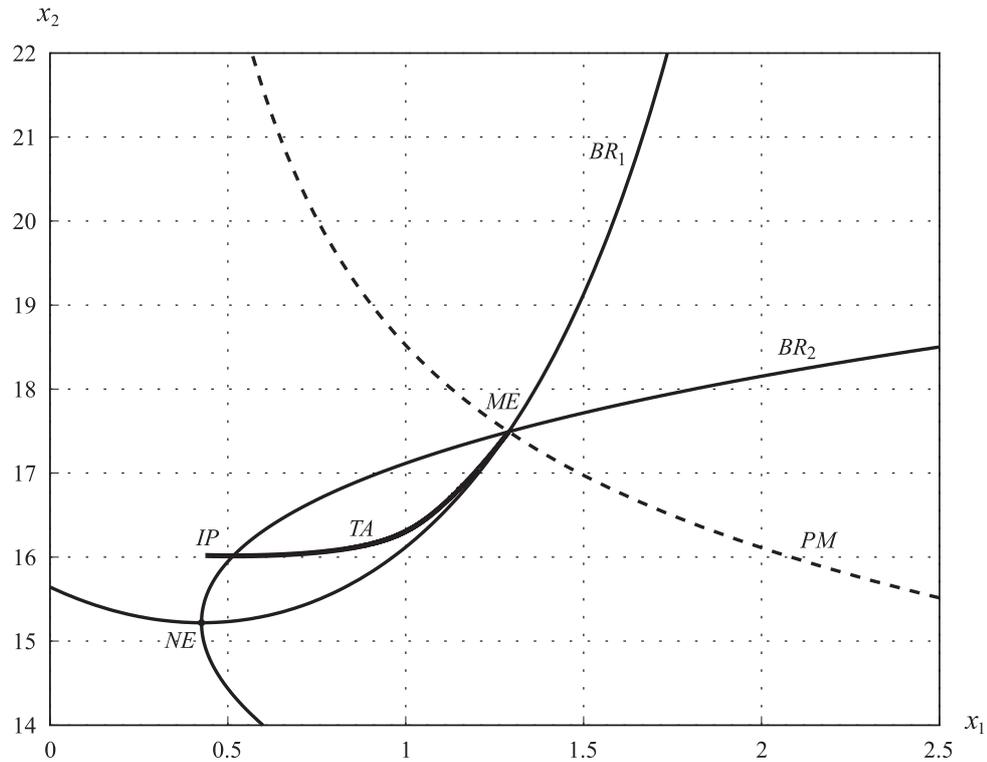


Рис. 15. Поиск рыночного равновесия.

Численный эксперимент в программе MATLAB показывает, что координаты траекторий стабилизируются в точке равновесия, значения координат которой вычисляется на уровне

$$x_1^A = 1.2886,$$

$$x_2^A = 17.4867.$$

Сравнение этих аппроксимационных значений со значениями координат рыночного равновесия, полученными аналитически в формуле (6.42), демонстрирует высокую точность вычислительного алгоритма

$$\epsilon = ((x_1^M - x_1^A)^2 + (x_2^M - x_2^A)^2)^{1/2} = 0.0053.$$

8. Доказательство локальной устойчивости рыночного равновесия для динамики алгоритма

Для определения локальной устойчивости рыночного равновесия составим матрицу Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \frac{\partial G}{\partial y_1} & \frac{\partial G}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial y_1} & 1 \\ 1 & -\frac{\partial g}{\partial y_2} \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра, если удовлетворяются условия

$$\begin{cases} \Delta_1 = -\frac{\partial f}{\partial y_1} < 0, \\ \Delta_2 = \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial g}{\partial y_2} - 1 > 0, \end{cases}$$

то матрица Якоби является отрицательно определенной матрицей, что свидетельствует о локальной устойчивости рыночного равновесия. Действительно, знаки производных определяются соотношениями

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{y_2}{y_1} + y_1 \frac{e_1(x_1^N + x_2^N)(d_1 + e_1 y_1(x_1^N + y_1) + e_1 x_1^N(x_1^N + y_1))}{(d_1 - e_1 y_1(y_1 + x_1^N))^2} > 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_2} = \frac{y_1}{y_2} + y_2 \frac{e_2(x_1^N + x_2^N)(d_2 + e_2 y_2(x_2^N + y_2) + e_2 x_2^N(x_2^N + y_2))}{(d_2 - e_2 y_2(y_2 + x_2^N))^2} > 0.$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial g}{\partial y_2} - 1 = \\ &= \frac{y_2^2 e_2 (x_1^N + x_2^N) (d_2 + e_2 y_2 (x_2^N + y_2) + e_2 x_2^N (x_2^N + y_2))}{y_1 (d_2 - e_2 y_2 (y_2 + x_2^N))^2} + \\ &+ \frac{y_1^2 e_1 (x_1^N + x_2^N) (d_1 + e_1 y_1 (x_1^N + y_1) + e_1 x_1^N (x_1^N + y_1))}{y_2 (d_1 - e_1 y_1 (y_1 + x_1^N))^2} + \\ &+ y_1 y_2 e_1 e_2 (x_1^N + x_2^N)^2 \times \\ & \times \frac{(d_1 + e_1 y_1 (x_1^N + y_1) + e_1 x_1^N (x_1^N + y_1))}{(d_1 - e_1 y_1 (y_1 + x_1^N))^2 (d_2 - e_2 y_2 (y_2 + x_2^N))^2} \times \\ & \times (d_2 + e_2 y_2 (x_2^N + y_2) + e_2 x_2^N (x_2^N + y_2)) > 0, \end{aligned}$$

которое завершает проверку критерия Сильвестра.

Глава II

Равновесные траектории в биматричных играх

В этой главе исследуются модели эволюционных игр с ненулевой суммой. Рассматриваются игровые взаимодействия между двумя группами участников в рамках теории дифференциальных игр [179, 180]. При определении равновесных по Нэшу решений используются идеи и подходы неантагонистических дифференциальных игр [44]. Следует отметить, что динамические конструкции и методы анализа эволюционных игр, используемые в диссертации, основаны на подходах, предложенных в работе [65]. Основное внимание в исследовании эволюционных игр уделяется построению динамического равновесия по Нэшу с гарантирующими стратегиями игроков, которые максимизируют соответствующие функции выигрыша. Основным результатом является построение разрешающих траекторий, которые дают результат, лучший по сравнению с классическими моделями, например, моделями с репликаторной динамикой.

Динамика игрового взаимодействия соответствует дифференциальным играм [44, 62, 65, 66, 179] и эволюционным игровым моделям [24, 137, 160, 167, 169, 211]. Предполагается, что случайные взаимодействия между участниками представлены управляемым динамическим процессом, при котором соответствующие вероятности формируют фазовый вектор. Роль управляющих параметров играют информационные сигналы для участников. Такая динамика может быть интерпретирована как обобщение известных уравнений Колмогорова, которые применяются в некоторых стохастических моделях математической экономики и теории очередей. Обобщение состоит во введении управляющих параметров вместо фиксированных параметров, описывающих входящие и исходящие потоки внутри групп. Считается, что процесс эволюционирует на бесконечном интервале времени. Выигрыши участников в каждом раунде специфицируются матрицей выигрышей. Выигрыши групп определяются как среднее значение выигрышей участников. Рассматриваются различные типы этих средних значений: терминальные — для фиксированного времени, мультитерминальные — для временного интервала и мультитерминальные — для предела на бесконечном интервале времени. Заметим, что игра с ненулевой суммой была проанализирована [211] с дисконтированными интегральными функционалами выигрыша. Мультитерминальные функционалы связаны с концепцией, которая принимает во внимание не только локальные терминальные интересы групп, но ориентирована

также на изменения в будущем.

Вводится понятие динамического равновесия по Нэшу в классе стратегий управления по принципу обратной связи. Заметим, что обратные связи, генерируемые классической стратегией “наказания” в статических биматричных играх, являются естественным примером равновесия по Нэшу в динамическом плане. Природа таких ответных реакций антагонистична: они минимизируют выигрыш соперника, не максимизируя свой.

Предлагается иной подход, основанный на концепции “гарантии” и обеспечивающий более хорошие результаты, нежели классические решения. Такие новые решения генерируются в рамках теории позиционных дифференциальных игр и вовлекают гарантирующие обратные связи во вспомогательных играх с нулевой суммой [44, 62]. Такие игры с нулевой суммой рассматриваются в рамках теории минимаксных решений уравнений Гамильтона-Якоби [95, 98, 149]. Для аналитического построения функции цены и оптимальных гарантирующих ответных реакций используются как методы теории дифференциальных игр [44, 62], так и конструкции теории выживаемости [128]. Проверяются соответствующие необходимые и достаточные условия, которые формулируются в терминах сопряженных производных [98]. Синтез гарантирующих обратных связей для управляющих параметров определяется кривыми переключения с одной характеристики уравнения Гамильтона-Якоби на другую и задается структурой функций цены. Отметим, что аналогичные идеи численного построения решения используются в работах [52, 55].

Качественное поведение предложенных равновесных решений, порожденных гарантирующим синтезом, существенно отличается от траекторий эволюционных игр, представленных в классических моделях с динамическим репликатором. Напомним, что такие траектории, как правило, сходятся к статическому равновесию по Нэшу или циркулируют в его окрестности [167]. Новые равновесные решения не являются гладкими и имеют переключения по характеристикам уравнений Гамильтона-Якоби. В отличие от классических траекторий они расположены в пересечении областей, для которых величины выигрышей игроков лучше соответствующих величин выигрышей, рассчитанных для статического равновесия по Нэшу. Предложенные равновесные решения не сходятся к статическому равновесию по Нэшу, а их предельные значения выигрышей лучше, чем в точке равновесия по Нэшу. Рассмотренные примеры динамических игр показывают, что предложенные равновесные траектории сходятся к точкам пересечения синтезированных кривых переключе-

чения, т.е. к “новым” точкам равновесия с лучшим индексом выигрышей.

9. Эволюционная игра с ненулевой суммой. Динамическое равновесие по Нэшу

9.1. Динамика модели, функции выигрыша

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, которая описывает динамику поведения двух групп (коалиций)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + u \\ \dot{y} &= -y + v.\end{aligned}\tag{9.1}$$

Здесь параметр x , $0 \leq x \leq 1$, есть вероятность того, что произвольно выбранный игрок из первой группы придерживается первой стратегии (соответственно, $(1 - x)$ есть вероятность того, что он придерживается второй стратегии). Параметр y , $0 \leq y \leq 1$, означает вероятность выбора первой стратегии игроком из второй коалиции (соответственно, $(1 - y)$ – вероятность того, что он придерживается второй стратегии). Управляющие параметры u и v удовлетворяют условиям $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$, и могут быть интерпретированы как сигналы, рекомендуемые смену стратегий игроками. Например, значение $u = 0$ ($v = 0$) соответствует сигналу: “сменить первую стратегию на вторую”. Значение $u = 1$ ($v = 1$) соответствует сигналу: “сменить вторую стратегию на первую”. Значение $u = x$ ($v = y$) соответствует сигналу: “сохранять предыдущую стратегию”.

Отметим, что основания для динамики (9.1) и ее свойства были рассмотрены в [65, 211]. В этой динамике обобщаются дифференциальные уравнения Колмогорова в предположении, что коэффициенты входящих и исходящих потоков внутри коалиций участников не заданы априори и могут быть сконструированы в управляемом процессе по принципу обратной связи.

В качестве интерпретации динамики (9.1) рассмотрим игровое взаимодействие двух больших групп фирм-участников (или их инвестиций) на двух рынках. Пусть x – часть средств, которую игроки первой коалиции (это может быть финансовая или промышленная группа) инвестируют в первый рынок (это может быть валютный рынок, рынок товаров или инновационных технологий [24]). Соответственно, $1 - x$ – инвестиции первой коалиции во второй рынок. Пусть y – часть средств, которую игроки второй коалиции инвестируют в первый рынок. Соответственно $1 - y$ – инвестиции второй коалиции во второй рынок. Предположим,

что активность коалиций на рынке регулируется управляющим органом. Используя управляющие параметры u и v , управляющий орган может влиять на распределение средств x и y . Динамика этого влияния описывается системой (9.1) и обеспечивает некоторую инертность (или независимость) игроков по отношению к управляющим сигналами u , v , тогда как скорость \dot{x} , \dot{y} изменения пропорций капитала x , y не прямо пропорциональна сигналам, а зависит от размеров этих пропорций. Например, первое уравнение в (9.1) означает, что согласно сигналу $u = 0$ пропорция x убывает к нулю согласно динамике $\dot{x} = -x$.

Предположим, что выигрыш игрока из первой коалиции описывается матрицей $A = a_{ij}$. Выигрыш игрока из второй коалиции описывается матрицей $B = b_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, например, для игры фирм на двух рынках следующие ситуации, которые будем называть почти антагонистическими. Предположим, что первый рынок является более прибыльным для инвестиций, нежели второй. Тогда выполняются следующие условия для матриц A и B

$$\begin{aligned} a_{11} &> a_{2j}, & a_{12} &> a_{21}, \\ b_{12} &> b_{2j}, & b_{11} &> b_{22}, \\ j &= 1, 2. \end{aligned}$$

Предположим, что фирмы первой коалиции сильнее, чем фирмы второй коалиции. Они стараются захватить оба рынка и, следовательно, матрица A имеет главную доминирующую диагональ

$$a_{ii} > a_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2.$$

Фирмы второй коалиции стараются избежать взаимодействий с фирмами первой коалиции на одном и том же рынке и, следовательно, матрица B имеет побочную доминирующую диагональ

$$b_{ij} > b_{ii}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2.$$

Замечание 9.1 Отметим, что в такой почти антагонистической игре имеется одна статическая точка равновесия по Нэшу. Дальнейшие построения динамической игры связаны с этим случаем для определенности и могут быть обобщены на другие случаи соотношений параметров матриц A и B .

Замечание 9.2 Отметим, что почти антагонистическая структура биматричной игры может возникать и при других соотношениях параметров матриц A и B . Например, она возникает в случае игры торговцев “медведей” и “быков” на рынках акций и облигаций. Такой пример детально рассматривается ниже.

Замечание 9.3 Случай почти антагонистической игры может быть расширен на случай почти кооперативной (координационной) игры с тремя статическими равновесиями по Нэшу. Ниже также приводится соответствующий пример координационных инвестиций в два различных проекта.

Терминальные функции выигрыша коалиций определяются как математическое ожидание выигрышей, задаваемых соответствующими матрицами A и B в биматричной игре, и могут быть интерпретированы как “локальные” интересы коалиций

$$\begin{aligned}
 g_A(x(T), y(T)) = & \\
 a_{11}x(T)y(T) + a_{12}x(T)(1 - y(T)) + a_{21}(1 - x(T))y(T) + & \\
 + a_{22}(1 - x(T))(1 - y(T)) = & \quad (9.2) \\
 C_A x(T)y(T) - \alpha_1 x(T) - \alpha_2 y(T) + a_{22}, &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_B(x(T), y(T)) = & \\
 b_{11}x(T)y(T) + b_{12}x(T)(1 - y(T)) + b_{21}(1 - x(T))y(T) + & \\
 + b_{22}(1 - x(T))(1 - y(T)) = & \quad (9.3) \\
 C_B x(T)y(T) - \beta_1 x(T) - \beta_2 y(T) + b_{22}. &
 \end{aligned}$$

в заданный момент T . Здесь параметры C_A , α_1 , α_2 и C_B , β_1 , β_2 определены в соответствии с классической теорией биматричных игр (см., например, [24])

$$\begin{aligned}
 C_A &= a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \\
 \alpha_1 &= a_{22} - a_{12}, \\
 \alpha_2 &= a_{22} - a_{21}, \\
 C_B &= b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}, \\
 \beta_1 &= b_{22} - b_{12}, \\
 \beta_2 &= b_{22} - b_{21}.
 \end{aligned}$$

“Глобальные” интересы J_A^∞ , J_B^∞ коалиций определяются как многозначные (двузначные) функции, образованные нижними и верхними

пределами средних значений

$$\begin{aligned} J_A^\infty &= [J_A^-, J_A^+], \\ J_A^- &= J_A^-(x(\cdot), y(\cdot)) = \liminf_{t \rightarrow \infty} g_A(x(t), y(t)) \\ J_A^+ &= J_A^+(x(\cdot), y(\cdot)) = \limsup_{t \rightarrow \infty} g_A(x(t), y(t)), \end{aligned} \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned} J_B^\infty &= [J_B^-, J_B^+], \\ J_B^- &= J_B^-(x(\cdot), y(\cdot)) = \liminf_{t \rightarrow \infty} g_B(x(t), y(t)), \\ J_B^+ &= J_B^+(x(\cdot), y(\cdot)) = \limsup_{t \rightarrow \infty} g_B(x(t), y(t)), \end{aligned} \quad (9.5)$$

посчитанных для траекторий $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (9.1).

Рассмотрим эволюционную игру с ненулевой суммой с динамикой (9.1) и глобальными выигрышами (9.4), (9.5). В теории дифференциальных игр (см., например, [44, 62]) существует подход для построения равновесных решений из класса стратегий, определенных по принципу обратной связи $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = v(t, x, y, \varepsilon)$, для игр с ненулевой суммой. Такой подход основан на решении вспомогательных игр с нулевой суммой. В связи с нашей постановкой задачи (см. функционалы (9.4), (9.5)), мы рассматриваем игры с нулевыми суммами для функционалов $J_A^-, J_A^+, J_B^-, J_B^+$. Известно, что задачи с нулевой суммой могут быть решены в рамках теории дифференциальных игр, и решение для гарантирующих стратегий может быть получено в рамках принципа динамического программирования. Такой принцип требует нахождения функций цены, которые являются обобщенными решениями уравнений Гамильтона-Якоби, т.е., фактически задача сводится к решению уравнений в частных производных первого порядка.

9.2. Динамическое равновесие по Нэшу

Следуя [44, 65], представим определение динамического равновесия по Нэшу из класса замкнутых стратегий (обратных связей) $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = v(t, x, y, \varepsilon)$ для игры с ненулевой суммой с динамикой (9.1) и многозначных функционалов выигрыша (9.4), (9.5).

Определение 9.1 Пусть $\varepsilon > 0$ и $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Пара обратных связей $U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon)$, $V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon)$ называются равновесием по Нэшу в начальной точке (x_0, y_0) , если для любых других обратных связей $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, $V = v(t, x, y, \varepsilon)$ выполняются следующие условия:

для всех траекторий

$$\begin{aligned}(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) &\in X(x_0, y_0, U^0, V^0), \\(x_1(\cdot), y_1(\cdot)) &\in X(x_0, y_0, U, V^0), \\(x_2(\cdot), y_2(\cdot)) &\in X(x_0, y_0, U^0, V)\end{aligned}$$

выполняются неравенства

$$\begin{aligned}J_A^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) &\geq J_A^+(x_1(\cdot), y_1(\cdot)) - \varepsilon, \\J_B^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) &\geq J_B^+(x_2(\cdot), y_2(\cdot)) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Здесь символом X обозначено множество траекторий, выходящих из начальной точки и порожденных соответствующими стратегиями в смысле работы [62].

9.3. Вспомогательные игры с нулевой суммой

Для построения желаемых равновесных обратных связей U^0, V^0 используем подход [44]. В соответствии с таким подходом, мы выстраиваем равновесие с помощью оптимальных обратных связей для дифференциальных игр $\Gamma_A = \Gamma_A^- \cup \Gamma_A^+$ и $\Gamma_B = \Gamma_B^- \cup \Gamma_B^+$ с выигрышами J_A^∞ (9.4) и J_B^∞ (9.5). В игре Γ_A первая коалиция гарантированно максимизирует функционал $J_A^-(x(\cdot), y(\cdot))$, используя обратную связь $U = u(t, x, y, \varepsilon)$, а вторая коалиция старается, напротив, минимизировать функционал $J_A^-(x(\cdot), y(\cdot))$, используя обратную связь $V = v(t, x, y, \varepsilon)$. Наоборот, в игре Γ_B вторая коалиция гарантированно максимизирует функционал $J_B^-(x(\cdot), y(\cdot))$, а первая коалиция минимизирует функционал $J_B^+(x(\cdot), y(\cdot))$.

Введем следующие обозначения. Обратные связи, решающие, соответственно, задачу гарантированной максимизации функционалов выигрыша J_A^-, J_B^- обозначим $u_A^0 = u_A^0(t, x, y, \varepsilon)$ и $v_B^0 = v_B^0(t, x, y, \varepsilon)$. Заметим, что такие обратные связи представляют гарантированную максимизацию выигрышей коалиций в длительной перспективе, и могут называться “позитивными”. Через $u_B^0 = u_B^0(t, x, y, \varepsilon)$ и $v_A^0 = v_A^0(t, x, y, \varepsilon)$ обозначим обратные связи наиболее неблагоприятные для противоположных коалиций; а именно, те, которые минимизирует функционал выигрыша J_B^+, J_A^+ , соответственно противоположных коалиций. Назовем такие обратные связи “наказывающими”.

Заметим, что негибкие решения отмеченных проблем могут быть получены в рамках классической теории биматричных игр. В самом деле предположим для определенности, что выполнены следующие соотноше-

ния для параметров матриц A и B , соответствующие почти антагонистической структуре биматричной игры,

$$\begin{aligned} C_A &> 0, & C_B &< 0, \\ 0 < x_A = \frac{\alpha_2}{C_A} &< 1, & 0 < x_B = \frac{\beta_2}{C_B} &< 1, \\ 0 < y_A = \frac{\alpha_1}{C_A} &< 1, & 0 < y_B = \frac{\beta_1}{C_B} &< 1. \end{aligned}$$

Можно доказать следующее утверждение.

Предложение 9.1 *Дифференциальные игры Γ_A^-, Γ_A^+ имеют равные значения*

$$v_A^- = v_A^+ = v_A = \frac{a_{22}C_A - \alpha_1\alpha_2}{C_A}$$

и дифференциальные игры Γ_B^-, Γ_B^+ имеют равные значения

$$v_B^- = v_B^+ = v_B = \frac{b_{22}C_B - \beta_1\beta_2}{C_B}$$

для произвольного начального положения $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [1, 0]$. Эти значения, например, могут быть гарантированы “позитивными” обратными связями u_A^{cl}, v_B^{cl} соответствующими классическим решениям x_A, y_B

$$u_A^0 = u_A^{cl} = u_A^{cl}(x, y) = \begin{cases} 0, & x_A < x \leq 1, \\ 1, & 0 \leq x < x_A, \\ [0, 1], & x = x_A. \end{cases} \quad (9.6)$$

$$v_B^0 = v_B^{cl} = v_B^{cl}(x, y) = \begin{cases} 0, & y_B < y \leq 1, \\ 1, & 0 \leq y < y_B, \\ [0, 1], & y = y_B. \end{cases} \quad (9.7)$$

“Наказывающие” обратные связи определяются формулами

$$u_B^0 = u_B^{cl} = u_B^{cl}(x, y) = \begin{cases} 0, & x_B < x \leq 1, \\ 1, & 0 \leq x < x_B, \\ [0, 1], & x = x_B, \end{cases} \quad (9.8)$$

$$v_A^0 = v_A^{cl} = v_A^{cl}(x, y) = \begin{cases} 0, & y_A < y \leq 1, \\ 1, & 0 \leq y < y_A, \\ [0, 1], & y = y_A, \end{cases} \quad (9.9)$$

и соответствуют классическим статическим решениям x_B, y_A , которые генерируют статическое равновесие по Нэшу $NE = (x_B, y_A)$.

Доказательство этого утверждения можно получить прямой подстановкой указанных стратегий в соответствующие функционалы выигрышей (9.4), (9.5).

Замечание 9.4 Заметим, что “позитивные” обратные связи (9.6), (9.7) не являются гибкими, так как они получены в статической модели биматричных игр, и не учитывается информация о динамике (9.1). Наша главная задача состоит в том, чтобы сконструировать гибкие “позитивные” обратные связи, которые существенным образом используют информацию о динамике.

Замечание 9.5 Значения функций выигрыша $g_A(x, y)$, $g_B(x, y)$ совпадают в точках (x_A, y_B) , (x_B, y_A)

$$g_A(x_A, y_B) = g_A(x_B, y_A) = v_A, \quad g_B(x_A, y_B) = g_B(x_B, y_A) = v_B.$$

Точка $NE = (x_B, y_A)$ есть “взаимно наказывающее” равновесие по Нэшу, а точка (x_A, y_B) не обладает равновесными свойствами в соответствующей статической игре.

9.4. Построение равновесия по Нэшу

Построим пару обратных связей, которые составляют равновесие по Нэшу. Для этого соединим “позитивные” обратные связи u_A^0, v_B^0 и “наказывающие” обратные связи u_B^0, v_A^0 .

Выберем начальное положение $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ и параметр точности $\varepsilon > 0$. Выберем траекторию $(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) \in X(x_0, y_0, U_A^0(\cdot), v_B^0(\cdot))$, сгенерированную “позитивными” обратными связями $u_A^0 = U_A^0(t, x, y, \varepsilon)$ и $v_B^0 = v_B^0(t, x, y, \varepsilon)$. Возьмем $T_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} g_A(x^0(t), y^0(t)) &> J_A^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) - \varepsilon, \\ g_B(x^0(t), y^0(t)) &> J_B^-(x^0(\cdot), y^0(\cdot)) - \varepsilon, \\ t &\in [T_\varepsilon, +\infty]. \end{aligned}$$

Обозначим через $u_A^\varepsilon(t): [0, T_\varepsilon] \rightarrow [0, 1]$, $v_B^\varepsilon(t): [0, T_\varepsilon] \rightarrow [0, 1]$ пошаговую реализацию стратегий v_A^0, v_B^0 такую, что соответствующая пошаговая траектория $(x_\varepsilon(\cdot), y_\varepsilon(\cdot))$ удовлетворяет условию

$$\max_{t \in [0, T_\varepsilon]} \|(x^0(t), y^0(t)) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon.$$

Из результатов работы [44] вытекает следующее утверждение.

Предложение 9.2 Пара обратных связей $U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon)$, $V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon)$, соединяющая вместе “позитивные” обратные связи u_A^0 , v_B^0 и “наказывающие” обратные связи u_B^0 , v_A^0 в соответствии с соотношениями

$$U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon) \begin{cases} u_A^\varepsilon(t), & \|(x, y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon, \\ u_B^0(x, y) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (9.10)$$

$$V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon) \begin{cases} v_B^\varepsilon(t), & \|(x, y) - (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))\| < \varepsilon, \\ v_A^0(x, y) & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (9.11)$$

является динамическим ε -равновесием по Нэшу.

Замечание 9.6 Заметим, что число ε может быть интерпретировано, как параметр “доверия” коалиций друг другу или как уровень “риска”, который коалиции допускают в игре. Этот параметр определяет барьер риска, окружающий траекторию равновесия $(x_\varepsilon(\cdot), y_\varepsilon(\cdot))$. Коалиции или следуют траектории равновесия, не покидая предписанный барьер риска, получая более выгодный индекс величин, или переступают через него, и “наказывающая” стратегия дает худшие результаты.

Замечание 9.7 Рассмотрим траектории, которые могут быть сгенерированы динамическим равновесием по Нэшу (9.10), (9.11) с негибкими классическими обратными связями (9.6)-(9.9). Если траектория $(x^{pos}(\cdot), y^{pos}(\cdot))$ эволюционирует в соответствии с “позитивными” стратегиями u_A^{cl} , v_B^{cl} (9.6), (9.7), то она сходится к новой точке равновесия (x_A, y_B) . Если коалиции наказывают друг друга стратегиями u_B^{cl} , v_A^{cl} (9.8), (9.9), тогда траектория $(x^{pun}(\cdot), y^{pun}(\cdot))$ сходится к статическому равновесию по Нэшу (x_B, y_A) . Но величины функционалов (9.4), (9.5) равны в обоих случаях

$$J_A^\infty(x^{pos}(\cdot), y^{pos}(\cdot)) = J_A^\infty(x^{pun}(\cdot), y^{pun}(\cdot)) = v_A,$$

$$J_B^\infty(x^{pos}(\cdot), y^{pos}(\cdot)) = J_B^\infty(x^{pun}(\cdot), y^{pun}(\cdot)) = v_B.$$

Ниже конструируются гибкие “позитивные” обратные связи, которые генерируют траектории $(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot))$, сводящие к “лучшим” положениям, чем негибкое динамическое равновесие (x_B, y_A) , (x_A, y_B) по обоим критериям $J_A^\infty(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot)) \geq v_A$, $J_B^\infty(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot)) \geq v_B$. В разделе 10 рассматриваются вспомогательные игры с нулевой суммой с терминальными выигрышами и для них получены аналитические решения. В разделе 11 конструируются нижние оболочки функций цены терминальных игр и

выводятся решения для вспомогательных мультитерминальных игр. В разделе 12 извлекаются “позитивные” обратные связи из структуры значений функций цены мультитерминальных игр.

10. Аналитическое решение дифференциальной игры с терминальным функционалом

10.1. Функции цены и обобщенные решения уравнений Гамильтона-Якоби

В этом разделе рассматривается вспомогательная терминальная дифференциальная игра с нулевой суммой с динамикой (9.1) и функционалами выигрыша (9.2) и (9.3) соответственно. Дальнейшие решения терминальных дифференциальных игр используются для построения предвидящих обратных связей путем расчета нижней оболочки мультитерминальных функционалов. Функции цены $w_i(T, t, x, y)$, $i = 1, 2$, терминальных игр определяются как величины соответствующих максиминов (минимаксов)

$$\begin{aligned} w_1(T, t_0, x_0, y_0) &= \max_{u(t,x,y)} \min_{(x_1(\cdot), y_1(\cdot))} g_A(x_1(T), y_1(T)) = \\ &= \min_{v(t,x,y)} \max_{(x_2(\cdot), y_2(\cdot))} g_A(x_2(T), y_2(T)), \\ w_2(T, t_0, x_0, y_0) &= \max_{v(t,x,y)} \min_{(x_2(\cdot), y_2(\cdot))} g_B(x_2(T), y_2(T)) = \\ &= \min_{u(t,x,y)} \max_{(x_1(\cdot), y_1(\cdot))} g_B(x_1(T), y_1(T)) \end{aligned}$$

для каждого начального положения (t_0, x_0, y_0) . Здесь траектории $(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$ порождаются обратной связью $u(t, x, y, \varepsilon)$ и произвольными поведением $v(t)$. Траектории $(x_2(\cdot), y_2(\cdot))$ порождаются обратной связью $v(t, x, y, \varepsilon)$ и произвольными поведением $u(t)$ из начального положения (t_0, x_0, y_0) .

Функции цены $w_i(T, t, x, y)$, $i = 1, 2$ удовлетворяют принципу динамического программирования, который подразумевает существование неувеличивающихся и неуменьшающихся направлений достижимых для динамической системы в каждой текущей позиции (так называемые свойства u и v стабильности функции цены). В точках, где функции цены дифференцируемы, эти свойства переходят в дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка типа Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial x} x - \frac{\partial w_1}{\partial y} y + \max_{0 \leq u \leq 1} \frac{\partial w_1}{\partial x} u + \min_{0 \leq v \leq 1} \frac{\partial w_1}{\partial y} v = 0, \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial x}x - \frac{\partial w_2}{\partial y}y + \max_{0 \leq u \leq 1} \frac{\partial w_2}{\partial x}u + \min_{0 \leq v \leq 1} \frac{\partial w_2}{\partial y}v = 0. \quad (10.2)$$

Функции цены $w_i(T, t, x, y)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют также краевому условию, когда $t = T$,

$$w_1(T, T, x, y) = C_A xy - \alpha_1 x - \alpha_2 y + a_{22} = g_A(x, y), \quad (10.3)$$

$$w_2(T, T, x, y) = C_B xy - \beta_1 x - \beta_2 y + b_{22} = g_b(x, y). \quad (10.4)$$

Рассмотрим теперь терминальные краевые задачи (10.1), (10.3) и (10.2), (10.4) для функций цены $w_1(T, t, x, y)$, $w_2(T, t, x, y)$. Обратим наше внимание на первую задачу (10.1), (10.3). Известно [95, 149], что функция цены $w_1(T, t, x, y)$ совпадает с обобщенным (минимаксным, вязкостным) решением этой задачи, которое является единственным и определяется терминальным краевым условием (10.3) и парой дифференциальных неравенств для сопряженных производных D^*w_1 и D_*w_1 , соответствующих уравнению Гамильтона-Якоби (10.1),

$$D^*w_1(T, t, x, y)|(s) \geq H(x, y, s), \quad (10.5)$$

$$D_*w_1(T, t, x, y)|(s) \leq H(x, y, s), \quad (10.6)$$

$$(t, x, y) \in [t_0, T] \times (0, 1) \times (0, 1), \quad s = (s_1, s_2) \in R^2.$$

Сопряженные производные D^*w_1 и D_*w_1 и Гамильтониан H заданы формулами [98]

$$D^*w_1(T, t, x, y)|(s) = \sup_{h \in R^2} (\langle s, h \rangle - \partial_- w_1(T, t, x, y)|(1, h)),$$

$$D_*w_1(T, t, x, y)|(s) = \inf_{h \in R^2} (\langle s, h \rangle - \partial_+ w_1(T, t, x, y)|(1, h)),$$

$$H(x, y, s) = -s_1 x - s_2 y + \max_{0 \leq u \leq 1} s_1 u + \min_{0 \leq v \leq 1} s_2 v.$$

Здесь выражение $\langle s, h \rangle$ обозначает обычное скалярное произведение векторов s и h , выражения $\partial_- w_1(T, t, x, y)|(1, h)$, $\partial_+ w_1(T, t, x, y)|(1, h)$ обозначают производные Дини для функции цены w_1 в точке (t, x, y) по направлению $(1, h)$, $h = (h_1, h_2) \in R^2$

$$\begin{aligned} & \partial_- w_1(T, t, x, y)|(1, h) = \\ & = \liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{w_1(T, t + \delta, x + \delta h_1, y + \delta h_2) - w_1(T, t, x, y)}{\delta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \partial_+ w_1(T, t, x, y)|(1, h) = \\ & = \limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{w_1(T, t + \delta, x + \delta h_1, y + \delta h_2) - w_1(T, t, x, y)}{\delta}. \end{aligned}$$

Отметим, что для кусочно-гладкой функции цены w_1 производные по направлению и сопряженные производные могут быть вычислены в рамках негладкого и выпуклого анализа. Предположим, например, что в некоторой окрестности $O_\varepsilon(t_*, x_*, y_*)$ точки $(t_*, x_*, y_*) \in [t_0, T] \times (0, 1) \times (0, 1)$ функция w_1 задана формулами

$$w_1(T, t, x, y) = \min_{i \in I} \max_{j \in J} \varphi_{ij}(T, t, x, y) = \max_{j \in J} \min_{i \in I} \varphi_{ij}(T, t, x, y).$$

$$w_1(T, t_*, x_*, y_*) = \varphi_{i,j}(T, t_*, x_*, y_*), i \in I, j \in J.$$

Производные по направлению в этом случае определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \partial_- w_1(T, t_*, x_*, y_*)|(1, h) &= \\ &= \partial_+ w_1(T, t_*, x_*, y_*)|(1, h) = \partial w_1(T, t_*, x_*, y_*)|(h) = \\ &= \min_{i \in I} \max_{j \in J} (a_{ij} + \langle b_{ij}, h \rangle) = \max_{j \in J} \min_{i \in I} (a_{ij} + \langle b_{ij}, h \rangle), \\ a_{ij} &= \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial t}, \\ b_{ij} &= \left(\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Введем конструкции для следующих множеств

$$C = \bigcap_{i \in I} C_i, \quad C_i = \text{co}\{b_{ij} : j \in J\},$$

$$D = \bigcap_{j \in J} D_j, \quad D_j = \text{co}\{b_{ij} : i \in I\}.$$

Здесь символом co обозначена выпуклая оболочка соответствующих векторов.

Оказывается, что сопряженные производные определяются соотношениями

$$D^* w_1(T, t_*, x_*, y_*)|(s) = \begin{cases} \max_{i \in I} \min_{j \in J} \{-\sum_{j \in J} \mu_j(s) a_{ij}\}, & s \in C, \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$D_* w_1(T, t_*, x_*, y_*)|(s) = \begin{cases} \min_{j \in J} \max_{i \in I} \{-\sum_{i \in I} \nu_i(s) a_{ij}\}, & s \in D, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь коэффициенты $\mu_j(s)$, $\nu_i(s)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \mu_j(s) b_{ij} &= s, \quad \mu_j(s) \geq 0, \quad \sum_{j \in J} \mu_j(s) = 1, \\ \sum_{i \in I} \nu_i(s) b_{ij} &= s, \quad \nu_i(s) \geq 0, \quad \sum_{i \in I} \nu_i(s) = 1. \end{aligned}$$

10.2. Описание аналитического решения краевой задачи

В этом разделе показывается, что краевая задача (10.1), (10.3) имеет аналитическое решение. Соответствующая функция цены $w_1(T, t, x, y)$ является кусочно гладкой и состоит из пяти гладких составляющих $\varphi_k(T, t, x, y), k = 1, \dots, 5$, которые соединяются операциями максимизации и минимизации. Аналитические формулы для гладких компонент $\varphi_k(T, t, x, y), k = 1, \dots, 5$ могут быть получены с помощью метода характеристик для соответствующих линейных уравнений Гамильтона-Якоби, которые возникают из нелинейных уравнений (10.1) подстановкой различных комбинаций экстремальных значений 0 и 1 в выражения для операций \max и \min . Зададим формулы для этих функций

$$\varphi_1(T, t, x, y) = C_A e^{2(t-T)} xy - \alpha_1 e^{t-T} x - \alpha_2 e^{t-T} y + a_{22}, \quad (10.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(T, t, x, y) &= C_A e^{2(t-T)} xy - \alpha_1 e^{t-T} x \\ &- (C_A e^{2(t-T)} + (\alpha_2 - C_A) e^{(t-T)}) y + \alpha_1 e^{(t-T)} + a_{12}, \end{aligned} \quad (10.8)$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(T, t, x, y) &= C_A e^{2(t-T)} xy - (C_A e^{2(t-T)} + (\alpha_1 - C_A) e^{(t-T)}) x - \\ &(C_A e^{2(t-T)} + (\alpha_2 - C_A) e^{(t-T)}) y + C_A e^{2(t-T)} + \\ &+(\alpha_1 + \alpha_2 - 2C_A) e^{(t-T)} + a_{11}, \end{aligned} \quad (10.9)$$

$$\begin{aligned} \varphi_4(T, t, x, y) &= C_A e^{2(t-T)} xy - (C_A e^{2(t-T)} + (\alpha_1 - C_A) e^{(t-T)}) x - \\ &\alpha_2 e^{t-T} y + \alpha_2 e^{t-T} + a_{21}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

$$\varphi_5(T, t, x, y) = \frac{a_{22} C_A - \alpha_1 \alpha_2}{C_A} = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}{C_A} = \frac{D_A}{C_A} = v_A.$$

Здесь v_A есть значение статической матричной игры с матрицей A . Функции $\varphi_k, k = 1, \dots, 5$ склеиваются вместе на следующих четырех линиях $L_m = L_m(T, t), m = 1, \dots, 4$,

$$L_1 = \{(x, y) : x_1(T, t) \leq x \leq 1, y = y_2(T, t)\},$$

$$L_2 = \{(x, y) : x = x_1(T, t), y_1(T, t) \leq y \leq 1\},$$

$$L_3 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq x_2(T, t), y = y_1(T, t)\},$$

$$L_4 = \{(x, y) : x = x_2(T, t), 0 \leq y \leq y_2(T, t)\}.$$

Здесь

$$x_1(T, t) = \max \left\{ 0, 1 - \left(1 - \frac{\alpha_2}{C_A} e^{T-t} \right) \right\},$$

$$x_2(T, t) = \max \left\{ 1, \frac{\alpha_2}{C_A} e^{T-t} \right\},$$

$$y_1(T, t) = \max \left\{ 0, 1 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{C_A} e^{T-t} \right) \right\},$$

$$y_2(T, t) = \max \left\{ 1, \frac{\alpha_1}{C_A} e^{T-t} \right\}.$$

Дадим описание функции цены w_1 .

Предложение 10.1 *Функция цены $w_1(T, t, x, y)$ определяется соотношением*

$$w_1(T, t, x, y) = \varphi_k(T, t, x, y), \quad \text{если } (x, y) \in D_k(T, t),$$

$$k = 1, \dots, 5. \quad (10.11)$$

Здесь области $D_k = D_k(T, t), k = 1, \dots, 5$ заданы условиями

$$\begin{aligned} D_1(T, t) &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \\ & x_2(T, t) \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq y_2(T, t)\}, \\ D_2(T, t) &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \\ & x_1(T, t) \leq x \leq 1, \quad y_2(T, t) \leq y \leq 1\}, \\ D_3(T, t) &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \\ & 0 \leq x \leq x_1(T, t), \quad y_1 \leq y \leq 1(T, t)\}, \\ D_4(T, t) &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \\ & 0 \leq x \leq x_2(T, t), \quad 0 \leq y \leq y_1(T, t)\}, \\ D_5(T, t) &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \\ & x_1(T, t) \leq x \leq x_2(T, t), \quad y_1(T, t) \leq y \leq y_2(T, t)\}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Замечание 10.1 *Некоторые области $D_k, k = 1, \dots, 5$ могут вырождаться и становиться пустыми. Отметим, что в случае, когда*

$$0 < x_A = \frac{\alpha_2}{C_A} < 1, \quad 0 < y_A = \frac{\alpha_1}{C_A} < 1,$$

все области $D_k, k = 1, \dots, 5$ имеют непустую внутренность на конечном интервале времени $(T_f, T]$,

$$\begin{aligned} T_f &= \max\{t_{x_1}, t_{x_2}, t_{y_1}, t_{y_2}\}, \\ t_{x_1} &= \max\{t : x_1(T, t) = 0\}, \\ t_{x_2} &= \max\{t : x_2(T, t) = 1\}, \\ t_{y_1} &= \max\{t : y_1(T, t) = 0\}, \\ t_{y_2} &= \max\{t : y_2(T, t) = 1\}. \end{aligned}$$

Внутренние части областей D_1, D_2, D_3, D_4 исчезают в соответствующие моменты времени $t_{x_2}, t_{y_2}, t_{x_1}, t_{x_2}$, и функция цены $w_1(T, t, x, y)$ становится равной константе, совпадающей с ценой статической игры,

$$w_1(T, t, x, y) = \varphi_5 = \frac{D_A}{C_A} = v_A,$$

$$(t \leq T_d, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]),$$

$$T_d = \min\{t_{x_1}, t_{x_2}, t_{y_1}, t_{y_2}\}.$$

На рис.16 линии $L_m, m = 1, \dots, 4$ и области $D_k, k = 1, \dots, 5$ показаны для случая $x_A = 0.6, y_A = 0.4, e^{(T-t)} = 1.5$.

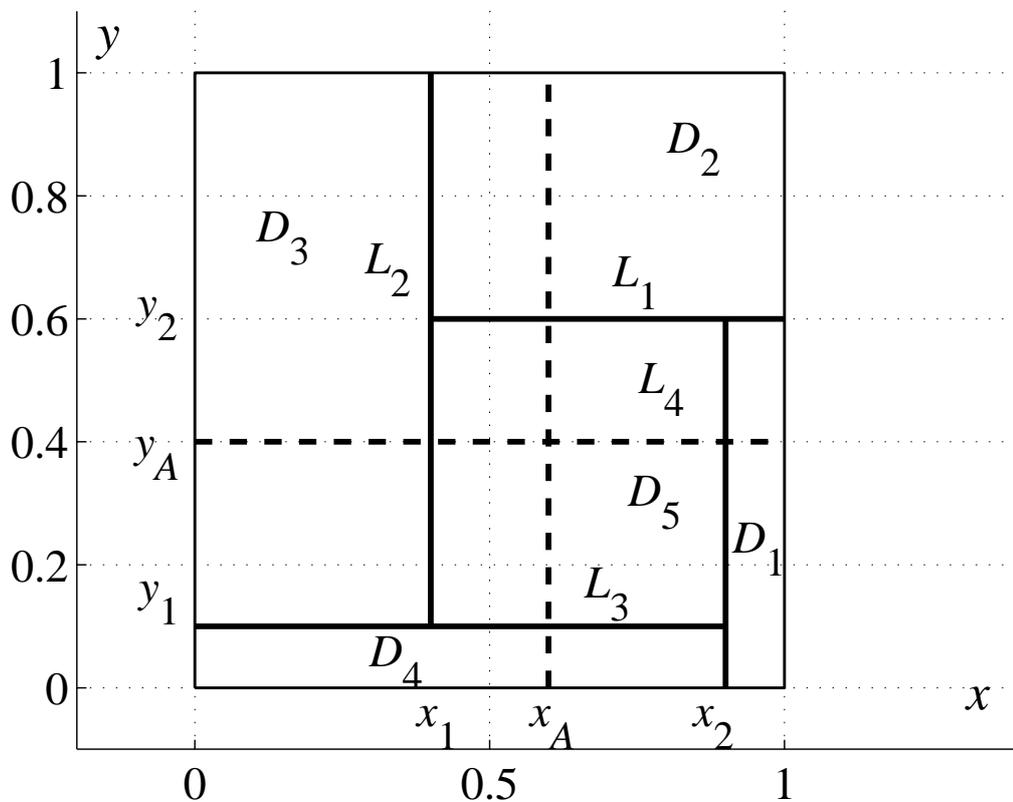


Рис. 16. Структура функции цены w_1 в терминальной задаче.

10.3. Проверка дифференциальных неравенств в терминальной краевой задаче

Для доказательства Предложения 10.1. покажем, что необходимые и достаточные условия (10.3), (10.5), (10.6) выполнены для функции $w_1(T, t, x, y)$, определенной формулами (10.11), (10.12).

Доказательство

Очевидно, что терминальное краевое условие (10.3) выполняется для функции $w_1(T, t, x, y)$. Проверим, удовлетворяет ли функция $w_1(T, t, x, y)$ дифференциальным неравенствам (10.5), (10.6). Легко убедиться, что функции $\varphi_k(T, t, x, y)$, $k = 1, \dots, 5$, удовлетворяют уравнению Гамильтона-Якоби (10.1) во внутренних точках $D_K^0 = \text{int}D_k$ областей D_k , $k = 1, \dots, 5$. Остается проверить неравенства (10.5), (10.6) в точках границ ∂D_k этих областей, более точно, в точках линий $L_m(T, t)$, $m = 1, \dots, 4$. Рассмотрим, например, часть

$$L_1^{12} = L_1^{12}(T, t) = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x_2(T, t), x \leq 1, y = y_2(T, t)\}$$

линии L_1 , в точках которой функции φ_1 и φ_2 склеиваются вместе (см. Рис.16). Вычислим производные $\partial\varphi_i/\partial t$, $\partial\varphi_i/\partial x$, $\partial\varphi_i/\partial y$, $i = 1, 2$ на линии L_1^{12}

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} &= 2C_A e^{2(t-T)}xy - \alpha_1 e^{(t-T)}x - \alpha_2 e^{(t-T)}y = \alpha_1 e^{(t-T)}x - \frac{\alpha_1\alpha_2}{C_A}, \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} &= C_A e^{2(t-T)}y - \alpha_1 e^{(t-T)} = 0, \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} &= C_A e^{2(t-T)}x - \alpha_2 e^{(t-T)}, \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} &= 2C_A e^{2(t-T)}xy - \alpha_1 e^{(t-T)}x - 2C_A e^{2(t-T)}y - (\alpha_2 - C_A)e^{(t-T)}y \\ &\quad + \alpha_1 e^{(t-T)} = \alpha_1 e^{(t-T)}x - \frac{\alpha_1\alpha_2}{C_A} - \alpha_1(e^{(t-T)} - 1), \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} &= C_A e^{2(t-T)}y - \alpha_1 e^{(t-T)} = 0, \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} &= C_A e^{2(t-T)}x - (C_A e^{2(t-T)} + (\alpha_2 - C_A)e^{(t-T)}). \end{aligned}$$

Можно заметить, что частные производные $\partial\varphi_1/\partial y$ и $\partial\varphi_2/\partial y$ связаны в точках линии L_1^{12} неравенствами

$$0 \leq \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \leq \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}.$$

Следовательно, функции φ_1 и φ_2 склеиваются на линии L_1^{12} операцией максимизации. Тогда для функции $w_1(T, t, x, y)$ имеет место следующее соотношение

$$w_1(T, t, x, y) = \max\{\varphi_1(T, t, x, y), \varphi_2(T, t, x, y)\}$$

в некоторой окрестности линии L_1^{12} . Кроме того, имеем здесь соотношение

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 0.$$

Таким образом, производная по направлению $(1, h) = (1, h_1, h_2)$ определяется соотношением

$$\partial w_1(T, t, x, y)|(1, h) = \max\left\{\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} h_2, \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} h_2\right\}.$$

Тогда для сопряженных производных получаем соотношения

$$D^* w_1(T, t, x, y)|(s) = \begin{cases} -\lambda a_1 - (1 - \lambda) a_2, \\ \text{если } s_1 = 0 \text{ и } s_2 = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_2, \\ +\infty, \\ \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$D_* w_1(T, t, x, y)|(s) = -\infty, \quad s \in R^2.$$

Здесь $0 \leq \lambda \leq 1$, $a_i = \partial \varphi_i / \partial t$, $b_i = \partial \varphi_i / \partial y$, $i = 1, 2$.

Напомним, что нам необходимо проверить пару условий

$$D^* w_1(T, t, x, y)|(s) \geq H(x, y, s),$$

$$D_* w_1(T, t, x, y)|(s) \leq H(x, y, s).$$

Очевидно, что второе неравенство выполняется. Проверим первое. Для векторов

$$s = (s_1, s_2), \quad s_1 = 0, \quad s_2 = \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + (1 - \lambda) \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

имеем соотношения

$$D^* w_1(T, t, x, y)|(s) = (1 - \lambda) \alpha_1 (e^{(t-T)} - 1) - \alpha_1 e^{(t-T)} x + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{C_A},$$

$$H(x, y, s) = \max_{0 \leq u \leq 1} s_1 (-x + u) + \min_{0 \leq v \leq 1} s_2 (-y + v) = -s_2 y = (1 - \lambda) \alpha_1 (e^{(t-T)} - 1) - \alpha_1 e^{(t-T)} x + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{C_A}.$$

Таким образом, получаем

$$D^* w_1(T, t, x, y)|(s) = H(x, y, s)$$

для $s \in \text{dom} D^* w_1$. Здесь символом dom обозначена часть области определения функции $D^* w_1$, в которой эта функция принимает конечные значения. Таким образом, получаем, что дифференциальные неравенства (10.5), (10.6) выполняются для функции w_1 на множестве L_1^{12} .

Проверим условия (10.5), (10.6) в точках еще одной типичной линии склейки. Рассмотрим множество

$$L_4^{15} = L_4^{15}(T, t) = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \\ x = x_2(T, t), \quad y_1(T, t) \leq y \leq y_2(T, t)\},$$

в котором склеиваются функции φ_1 и φ_5 (см. Рис.16). Очевидно, что частные производные функции φ_5 равны нулю

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} = 0.$$

Можно заметить, что условие

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = C_A e^{2(T-t)} y - \alpha_1 e^{(T-t)} \leq 0 = \frac{\partial \varphi_5}{\partial x}$$

выполняется на множестве L_4^{15} при условии $y \leq (\alpha_1 e^{(T-t)})/C_A$ для точек $(x, y) \in L_4^{15}$. Поэтому ясно, что функции φ_1 и φ_5 склеиваются с помощью операции минимизации

$$w_1(T, t, x, y) = \min\{\varphi_1(T, t, x, y), \varphi_5(T, t, x, y)\}$$

на множестве L_4^{15} . Учитывая, что

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_5}{\partial y} = 0,$$

получаем следующее соотношение для производной по направлению на линии L_4^{15}

$$\partial w_1(T, t, x, y)|(1, h) = \min\{0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} h_1\}.$$

Сопряженные производные определяются формулами

$$D^* w_1(T, t, x, y)|(s) = +\infty, \quad s \in R^2,$$

$$D_* w_1(T, t, x, y)|(s) = \begin{cases} -\lambda a_1 - (1 - \lambda) a_5, \\ \text{если } s_2 = 0 \text{ и } s_1 = \lambda b_1 + (1 - \lambda) b_5, \\ -\infty, \\ \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $a_i = \partial \varphi_i / \partial t$, $b_i = \partial \varphi_i / \partial x$, $i = 1, 5$.

Очевидно, что

$$D^* w_1(T, t, x, y)|(s) \geq H(x, y, s), \quad s \in R^2.$$

Вычислим нижнюю сопряженную производную $D_* w_1(T, t, x, y)|(s)$ и Гамильтониан $H(x, y, s)$ по векторам

$$s = (s_1, s_2), \quad s_2 = 0, \quad s_1 = \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + (1 - \lambda) \frac{\partial \varphi_5}{\partial x}.$$

Получаем соотношения

$$\begin{aligned} H(x, y, s) &= \max_{0 \leq u \leq 1} s_1(-x + u) + \min_{0 \leq v \leq 1} s_2(-y + v) = \\ &= -s_1 x = -\lambda \alpha_2 e^{(t-T)} y + \lambda \frac{\alpha_1 \alpha_2}{C_A}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$D_* w_1(T, t, x, y)|(s) = H(x, y, s)$$

для $s \in \text{dom} D_* w_1$. Следовательно, дифференциальные неравенства (10.5), (10.6) также выполняются для функции w_1 на множестве L_4^{15} . Условия (10.5), (10.6) на других частях линий L_m , $m = 1, \dots, 4$ могут быть проверены аналогично. Таким образом, доказано, что функция $w_1(T, t, x, y)$, определенная формулами (10.11), (10.12), является обобщенным (минимаксным, вязкостным) решением терминальной краевой задачи (10.1), (10.3) и, следовательно, совпадает с функцией цены соответствующей дифференциальной игры (9.1), (9.2).

11. Нижняя оболочка терминальной функции цены и функция цены игры с мультитерминальным функционалом выигрыша

11.1. Дифференциальная игра с мультитерминальным функционалом

В предыдущем разделе мы получили решение для вспомогательной терминальной краевой задачи (10.1), (10.3). Решение этой задачи (функция цены) $w_1(T, t, x, y)$ зависит от терминального момента T . Конечно, такое решение неприемлемо в эволюционном смысле, потому что мы получаем “хороший” результат в момент времени T , но не в другое время, включая бесконечность. Поэтому, в этом разделе мы сконструируем функцию цены для дифференциальной игры с мультитерминальным функционалом выигрыша

$$G_A(x(\cdot), y(\cdot)) = \inf_{t_0 \leq t < +\infty} g_A(x(t), y(t)). \quad (11.1)$$

Функционал (11.1) определяет предвидящий принцип, так как принимает во внимание будущие значения $g_A(x(t), y(t))$, начиная от времени t_0 , заканчивая $+\infty$.

Используя результаты, полученные в теории дифференциальных игр (см. [62]) и теории выживаемости (см. [128]), можно доказать, что

дифференциальная игра с нулевой суммой с динамикой (9.1) и функционалом (11.1) имеет цену.

Теорема 11.1 *Существует седловая точка, определяющая стационарную функцию цены*

$$\begin{aligned}
& \sup_{u(t,x,y,\varepsilon)} \inf_{(x_1(\cdot), y_1(\cdot))} \inf_{s \in [t_0, +\infty]} g_A(x_1(s), y_1(s)) = \\
& = \inf_{v(t,x,y,\varepsilon)} \sup_{(x_2(\cdot), y_2(\cdot))} \inf_{s \in [t_0, +\infty]} g_A(x_2(s), y_2(s)) = \\
& = \lim_{T \rightarrow +\infty} \min_{v(t,x,y,\varepsilon)} \max_{(x_2(\cdot), y_2(\cdot))} \min_{s \in [t_0, T]} g_A(x_2(s), y_2(s)) = \\
& = \lim_{T \rightarrow +\infty} \max_{u(t,x,y,\varepsilon)} \min_{(x_1(\cdot), y_1(\cdot))} \min_{s \in [t_0, T]} g_A(x_1(s), y_1(s)) = \\
& = w_A(t_0, x_0, y_0) = w_A(x_0, y_0).
\end{aligned}$$

Здесь траектории $(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$, $(x_2(\cdot), y_2(\cdot))$ генерируются из начального положения (t_0, x_0, y_0) обратными связями $u(t, x, y, \varepsilon)$, $v(t, x, y, \varepsilon)$ максимизирующих и минимизирующих игроков соответственно, и произвольными управлениями их оппонентов.

Доказательство Доказательство следует из теоремы об альтернативе [62], стационарного свойства динамики (9.1), конечности величин функционала G_A (11.1), и может быть выведено через понятие выживаемости [128]. Схема доказательства следующая.

В общем случае имеют место условия

$$\begin{aligned}
& \sup_{u(t,x,y,\varepsilon)} \inf_{(x_1(\cdot), y_1(\cdot))} \inf_{s \in [t_0, +\infty]} g_A(x_1(s), y_1(s)) \leq \\
& \leq \inf_{v(t,x,y,\varepsilon)} \sup_{(x_2(\cdot), y_2(\cdot))} \inf_{s \in [t_0, +\infty]} g_A(x_2(s), y_2(s)) \leq \\
& \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} \min_{v(t,x,y,\varepsilon)} \max_{(x_2(\cdot), y_2(\cdot))} \min_{s \in [t_0, T]} g_A(x_2(s), y_2(s)) = \quad (11.2) \\
& = \lim_{T \rightarrow +\infty} \max_{u(t,x,y,\varepsilon)} \min_{(x_1(\cdot), y_1(\cdot))} \min_{s \in [t_0, T]} g_A(x_1(s), y_1(s)) = \\
& = w_A(t, x, y).
\end{aligned}$$

Можно проверить следующие свойства функции $w_A(t, x, y)$, сформулированные в приведенных ниже леммах. Отметим, что этим леммы имеют стандартные доказательства [95, 98].

Лемма 11.1 *Функция w_A стационарна (не зависит от времени t). Более точно,*

$$w_A(t, x, y) = w_A(s, x, y) = w_A(x, y)$$

для всех $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], t \in [t_0, +\infty], s \in [t_0, +\infty]$.

Лемма 11.2 *Функция w_A удовлетворяет условию Липшица*

$$|w_A(x_1, y_1) - w_A(x_2, y_2)| \leq K(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$

для всех $(x_i, y_i) \in [0, 1] \times [0, 1], i = 1, 2$.

Лемма 11.3 *Функция w_A мажорируется выигрышем g_A*

$$w_A(x, y) \leq g_A(x, y), \quad ((x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]). \quad (11.3)$$

Лемма 11.4 *Функция w_A является максимальной функцией, которая удовлетворяет принципу динамического программирования и для которой выполняется условие (11.3). Соответствующие свойства u -стабильности и v -стабильности могут быть представлены в бесконечно малых величинах следующим образом*

$$\min_{0 \leq v \leq 1} \max_{0 \leq u \leq 1} \partial_+ w_A(x, y)|(-x + u, -y + v) \geq 0 \quad (11.4)$$

для всех $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$, и

$$\max_{0 \leq u \leq 1} \min_{0 \leq v \leq 1} \partial_- w_A(x, y)|(-x + u, -y + v) \geq 0 \quad (11.5)$$

для всех $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$, где $w_A(x, y) < g_A(x, y)$. Здесь производные $\partial_- w_A(x, y)|(h_1, h_2)$, $\partial_+ w_A(x, y)|(h_1, h_2)$ функции w_A в точке $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$ вдоль направления $h = (h_1, h_2)$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \partial_- w_A(x, y)|(h_1, h_2) &= \liminf_{\delta \downarrow 0} \frac{w_A(x + \delta h_1, y + \delta h_2) - w_A(x, y)}{\delta}, \\ \partial_+ w_A(x, y)|(h_1, h_2) &= \limsup_{\delta \downarrow 0} \frac{w_A(x + \delta h_1, y + \delta h_2) - w_A(x, y)}{\delta}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Лемма 11.5 *Свойства u -стабильности (11.4) и v -стабильности (11.5) могут быть переписаны [98] в рамках сопряженных производных*

$$D_*w_A(x, y)|(s) \leq H(x, y, s), \quad (11.7)$$

$$((x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad s = (s_1, s_2) \in R^2),$$

$$\begin{aligned} D^*w_A(x, y)|(s) &\geq H(x, y, s), \\ ((x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad w_A(x, y) < g_A(x, y), \\ s &= (s_1, s_2) \in R^2). \end{aligned} \quad (11.8)$$

Здесь сопряженные производные D^*w_A , D_*w_A и Гамильтониан H определяются соотношениями

$$D^*w_A(x, y)|(s) = \sup_{h \in R^2} (\langle s, h \rangle - \partial_- w_A(x, y)|(h)),$$

$$D_*w_A(x, y)|(s) = \inf_{h \in R^2} (\langle s, h \rangle - \partial_+ w_A(x, y)|(h)), \quad (11.9)$$

$$H(x, y, s) = -s_1x - s_2y + \max\{0, s_1\} + \min\{0, s_2\}. \quad (11.10)$$

Учитывая свойства стабильности и используя концепцию стратегии “экстремального сдвига” [179], можно доказать, что соответствующие траектории обеспечивают значение функционала G_A (11.1) на $[t_0, +\infty)$ равное значению функции w_A . Следовательно, все неравенства в (11.2) превращаются в равенства и этот факт доказывает Теорему 11.1.

Обратный результат также верен.

Лемма 11.6 *Дифференциальные неравенства (11.4), (11.5) (или, эквивалентно, (11.7), (11.8)) вместе с краевым условием (11.3) однозначно определяют функцию цены w_A . Более точно, существует максимальная функция, которая удовлетворяет этим условиям, и эта функция совпадает с функцией w_A .*

Таким образом, или множество Лемм 11.3, 11.4, 11.6 или множество Лемм 11.3, 11.5, 11.6 обеспечивают необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция w_A совпадала с функцией цены.

Свойства стабильности (11.4), (11.5) (или эквивалентно свойства (11.7), (11.8)) связаны со стационарным уравнением Гамильтона-Якоби.

Лемма 11.7 *В точках $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$, в которых $w_A(x, y) < g_A(x, y)$ и w_A дифференцируема, неравенства (11.4), (11.5) (или (11.7), (11.8)) превращаются в стационарное уравнение Гамильтона-Якоби*

$$-\frac{\partial w_A}{\partial x}x - \frac{\partial w_A}{\partial y}y + \max\{0, \frac{\partial w_A}{\partial x}\} + \min\{0, \frac{\partial w_A}{\partial y}\} = 0. \quad (11.11)$$

Для кусочно-гладких функций мы имеем следующую стационарную версию свойств стабильности.

Лемма 11.8 *Если функция цены w_A является кусочно-гладкой, то сопряженные производные (11.9), (11.10) определяются соотношениями*

$$D^*w_A(x_*, y_*)|(s) = \begin{cases} 0, & s \in C, \\ +\infty, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$D_*w_A(x_*, y_*)|(s) = \begin{cases} 0, & s \in D, \\ -\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь

$$C = \bigcap_{i \in I} B_i, \quad B_i = \text{co}\{b_{ij} : j \in J\},$$

$$D = \bigcap_{j \in J} B_j, \quad B_j = \text{co}\{b_{ij} : i \in I\},$$

$$b_{ij} = \left(\frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right),$$

$$w_A(x, y) = \min_{i \in I} \max_{j \in J} \varphi_{ij}(x, y) = \max_{j \in J} \min_{i \in I} \varphi_{ij}(x, y),$$

$$w_A(x_*, y_*) = \varphi_{ij}(x_*, y_*), \quad i \in I, \quad j \in J, \\ (x, y) \in O_\varepsilon(x_*, y_*).$$

Дифференциальные неравенства (11.7), (11.8) преобразуются в формулы

$$0 \leq -s_1x - s_2y + \max\{0, s_1\} + \min\{0, s_2\},$$

$$(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad s = (s_1, s_2) \in D,$$

$$0 \geq -s_1x - s_2y + \max\{0, s_1\} + \min\{0, s_2\},$$

$$(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1), \quad w_A(x, y) < g_A(x, y), \quad s = (s_1, s_2) \in C.$$

11.2. Описание решения для игры с мультитерминальным функционалом

Прежде, чем описать аналитическое решение игры, представим кривые гладких компонент φ_1, φ_3 (10.7), (10.9) функции цены w_1 (10.11), параметризованной временем $s = t - T$. Нижние огибающие обеспечивают рассмотрение мультитерминальных интересов и представление принципа предвидения для конструирования обратных связей. Для того, чтобы

построить огибающую ψ_A^1 для φ_1 , необходимо вычислить производную соответствующих функций по параметру s , приравнять ее к нулю, найти корень полученного уравнения, и подставить найденный корень в функцию φ_1 . Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1}{\partial s} &= 2C_A e^{2s} xy - \alpha_1 e^s x - \alpha_2 e^s y = 0, \\ e^s &= \frac{\alpha_1 x + \alpha_2 y}{2C_A xy}, \\ \psi_A^1(x, y) &= \varphi_1(s, x, y) = a_{22} - \frac{(\alpha_1 x + \alpha_2 y)^2}{4C_A xy}.\end{aligned}$$

Сделав тоже самое с функцией φ_3 , получим ее нижнюю огибающую ψ_A^2 относительно параметра s

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_3}{\partial s} &= 2C_A e^{2s} xy - \\ &(C_A e^{2s} + (\alpha_1 - C_A) e^s) x - (C_A e^{2s} + (\alpha_2 - C_A) e^s) y + \\ &C_A e^{2s} + (\alpha_1 + \alpha_2 - 2C_A) e^s = 0, \\ e^s &= \frac{(\alpha_1 - C_A)(x - 1) + (\alpha_2 - C_A)(y - 1)}{2C_A(x - 1)(y - 1)}, \\ \psi_A^2(x, y) &= \varphi_3(s, x, y) = a_{11} - \frac{((C_A - \alpha_1)(1 - x) + (C_A - \alpha_2)(1 - y))^2}{4C_A(1 - x)(1 - y)}.\end{aligned}$$

Аналогичным образом определим нижние огибающие ψ_A^3 , ψ_A^4 гладких компонент ϕ_2 , ϕ_4 (10.8), (10.10). Соответственно имеем

$$\begin{aligned}\psi_A^3(x, y) &= C_A xy - \alpha_1 x - \alpha_2 y + a_{22}, \\ \psi_A^4(x, y) &= \frac{a_{22} C_A - \alpha_1 \alpha_2}{C_A} = v_A.\end{aligned}$$

Гладкие функции ψ_A^i , $i = 1, \dots, 4$, склеиваются вместе вдоль следу-

ЮЩИХ ЛИНИЙ K_A^j , $j = 1, \dots, 5$,

$$K_A^1 = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x = \frac{\alpha_2}{C_A}, \quad 0 \leq y \leq 1\},$$

$$K_A^2 = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, \\ \frac{\alpha_1}{C_A} \leq y \leq 1, \quad y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}x\},$$

$$K_A^3 = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, \\ 0 \leq y \leq \frac{\alpha_1}{C_A}, \quad y = -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1\},$$

$$K_A^4 = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq \frac{\alpha_1}{C_A}, \quad y = \frac{\alpha_1 x}{2C_A x - \alpha_2}\},$$

$$K_A^5 = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, \\ \frac{\alpha_1}{C_A} \leq y \leq 1, \quad y = -\frac{(C_A - \alpha_1)(1 - x)}{2C_A(1 - x) - (C_A - \alpha_2)} + 1\}.$$

Перейдем к аналитическому описанию функции цены w_A .

Лемма 11.9 *В случае, когда $C_A > 0$, функция цены $(x, y) \rightarrow w_A(x, y)$ определяется как*

$$w_A(x, y) = \psi_A^i(x, y), \quad \text{если } (x, y) \in E_A^i, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (11.12)$$

Здесь области E_A^i , $i = 1, \dots, 4$, определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
E_A^1 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, \\
&\quad \frac{\alpha_1 x}{2C_A x - \alpha_2} \leq y \leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x\}, \\
E_A^2 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, \\
&\quad -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1 \leq y \leq \\
&\quad \leq -\frac{(C_A - \alpha_1)(1 - x)}{2C_A(1 - x) - (C_A - \alpha_2)} + 1\}, \\
E_A^3 &= E_A^{31} \cup E_A^{32} \\
E_A^{31} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, \\
&\quad 0 \leq y \leq \frac{\alpha_1 x}{2C_A x - \alpha_2}\}, \\
E_A^{32} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, \\
&\quad -\frac{(C_A - \alpha_1)(1 - x)}{2C_A(1 - x) - (C_A - \alpha_2)} + 1 \leq y \leq 1\}, \\
E_A^4 &= E_A^{41} \cup E_A^{42} \\
E_A^{41} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, \\
&\quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x \leq y \leq 1\}, \\
E_A^{42} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, \\
&\quad 0 \leq y \leq -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1\}. \tag{11.13}
\end{aligned}$$

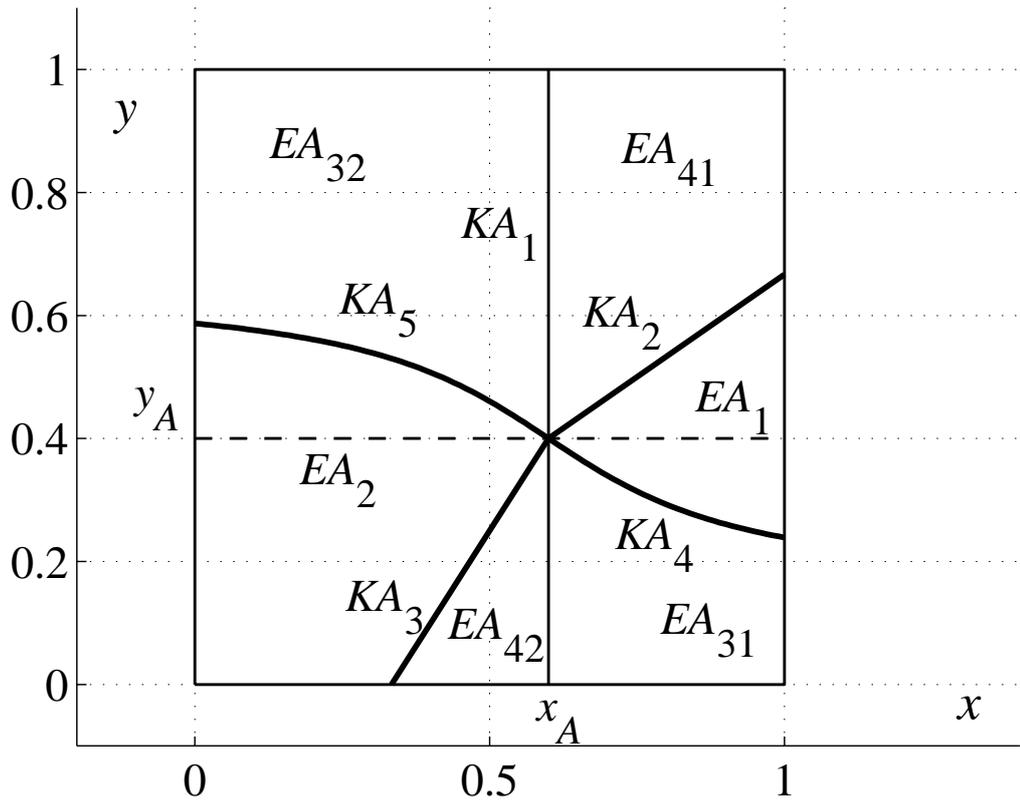


Рис. 17. Структура функции цены w_A в мультитерминальной задаче.

На рис.17 линии $K_A^j, j = 1, \dots, 5$ и области $E_A^i, i = 1, \dots, 4$ показаны для случая $C_A = 5, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3$.

Замечание 11.1 В области E_A^4 выполняются следующие соотношения

$$g_A(x, y) \geq w_A(x, y) = v_A,$$

то есть значение цены w_A меньше или равно значению функции выигрыша g_A .

Замечание 11.2 Позиционная стратегия $U_A^0 = u_A^0(x, y)$, соответствующая функции цены w_A , обеспечивает выживаемость траекторий $(x(\cdot), y(\cdot))$ системы (9.1) в области E_A^4 .

Замечание 11.3 В случае, когда $C_A < 0$, функция цены $(x, y) \rightarrow$

$w_A(x, y)$ определяется отношениями

$$\begin{aligned}
w_A(x, y) &= \psi_A^i(x, y), \quad \text{if } (x, y) \in E_A^i, \quad i = 1, \dots, 4, \\
\psi_A^1(x, y) &= a_{21} + \frac{((C_A - \alpha_1)x + \alpha_2(1 - y))^2}{4C_A x(1 - y)}, \\
\psi_A^2(x, y) &= a_{12} + \frac{(\alpha_1(1 - x) + (C_A - \alpha_2)y)^2}{4C_A(1 - x)y}, \\
\psi_A^3(x, y) &= C_A xy - \alpha_1 x - \alpha_2 y + a_{22}, \\
\psi_A^4(x, y) &= v_A.
\end{aligned}$$

Здесь области E_A^i , $i = 1, \dots, 4$, определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
E_A^1 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, \\
&\quad -\frac{(C_A - \alpha_1)}{\alpha_2}x + 1 \leq y \leq -\frac{(C_A - \alpha_1)x}{2C_A x - \alpha_2} + 1\}, \\
E_A^2 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, \\
&\quad \frac{\alpha_1(1 - x)}{2C_A(1 - x) - (C_A - \alpha_2)} \leq y \leq \frac{\alpha_1}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x)\}, \\
E_A^3 &= E_A^{31} \cup E_A^{32}, \\
E_A^{31} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, \\
&\quad -\frac{(C_A - \alpha_1)x}{2C_A x - \alpha_2} + 1\} \leq y \leq 1, \\
E_A^{32} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, \\
&\quad 0 \leq y \leq \frac{\alpha_1(1 - x)}{2C_A(1 - x) - (C_A - \alpha_2)} + 1\}, \\
E_A^4 &= E_A^{41} \cup E_A^{42}, \\
E_A^{41} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\alpha_2}{C_A} \leq x \leq 1, \\
&\quad 0 \leq y \leq -\frac{(C_A - \alpha_1)}{\alpha_2}x + 1\}, \\
E_A^{42} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq x \leq \frac{\alpha_2}{C_A}, \\
&\quad \frac{\alpha_1}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) \leq y \leq 1\}.
\end{aligned} \tag{11.14}$$

Замечание 11.4 Для матрицы B функция цены w_B может быть определена аналогично. В случае, когда $C_B > 0$, функция цены $(x, y) \rightarrow$

$w_B(x, y)$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned}
w_B(x, y) &= \psi_B^i(x, y), \quad \text{if } (x, y) \in E_B^i, \quad i = 1, \dots, 4, \\
\psi_B^1(x, y) &= b_{22} - \frac{(\beta_1 x + \beta_2 y)^2}{4C_B x y}, \\
\psi_B^2(x, y) &= b_{11} - \frac{((C_B - \beta_1)(1 - x) + (C_B - \beta_2)(1 - y))^2}{4C_B(1 - x)(1 - y)}, \\
\psi_B^3(x, y) &= C_B x y - \beta_1 x - \beta_2 y + b_{22}, \\
\psi_B^4(x, y) &= v_B = \frac{b_{22}C_B - \beta_1\beta_2}{C_B}.
\end{aligned}$$

Здесь области E_B^i , $i = 1, \dots, 4$, определяются следующим образом

$$\begin{aligned}
E_B^1 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\beta_1}{C_B} \leq y \leq 1, \\
&\quad \frac{\beta_2 y}{2C_B y - \beta_1} \} \leq x \leq \frac{\beta_2}{\beta_1} y \}, \\
E_B^2 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq y \leq \frac{\beta_1}{C_B}, \\
&\quad -\frac{(C_B - \beta_2)}{(C_B - \beta_1)}(1 - y) + 1 \leq x \leq \\
&\quad \leq -\frac{(C_B - \beta_2)(1 - y)}{2C_B(1 - y) - (C_B - \beta_1)} + 1 \}, \\
E_B^3 &= E_B^{31} \cup E_B^{32} \\
E_B^{31} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\beta_1}{C_B} \leq y \leq 1, \\
&\quad 0 \leq x \leq \frac{\beta_2 y}{2C_B y - \beta_1} \}, \\
E_B^{32} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq y \leq \frac{\beta_1}{C_B}, \\
&\quad -\frac{(C_B - \beta_2)(1 - y)}{2C_B(1 - y) - (C_B - \beta_1)} + 1 \leq x \leq 1 \}, \\
E_B^4 &= E_B^{41} \cup E_B^{42} \\
E_B^{41} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\beta_1}{C_B} \leq y \leq 1, \\
&\quad \frac{\beta_2}{\beta_1} y \leq x \leq 1 \}, \\
E_B^{42} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq y \leq \frac{\beta_1}{C_B}, \\
&\quad 0 \leq x \leq -\frac{(C_B - \beta_2)}{(C_B - \beta_1)}(1 - y) + 1 \}. \tag{11.15}
\end{aligned}$$

В случае, когда $C_B < 0$, функция цены $(x, y) \rightarrow w_B(x, y)$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} w_B(x, y) &= \psi_B^i(x, y), \quad \text{if } (x, y) \in E_B^i, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \psi_B^1(x, y) &= b_{12} + \frac{(\beta_1(1-x) + (C_B - \beta_2)y)^2}{4C_B(1-x)y}, \\ \psi_B^2(x, y) &= b_{21} + \frac{((C_B - \beta_1)x + \beta_2(1-y))^2}{4C_Bx(1-y)}, \\ \psi_B^3(x, y) &= C_Bxy - \beta_1x - \beta_2y + b_{22}, \\ \psi_B^4(x, y) &= v_B. \end{aligned}$$

Здесь области E_B^i , $i = 1, \dots, 4$, определяются следующим образом

$$\begin{aligned} E_B^1 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\beta_1}{C_B} \leq y \leq 1, \\ &\quad -\frac{(C_B - \beta_2)}{\beta_1}y + 1 \leq x \leq -\frac{(C_B - \beta_2)y}{2C_By - \beta_1} + 1\}, \\ E_B^2 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq y \leq \frac{\beta_1}{C_B}, \\ &\quad \frac{\beta_2(1-y)}{2C_B(1-y) - (C_B - \beta_1)} \leq x \leq \frac{\beta_2}{(C_B - \beta_1)}(1-y)\}, \\ E_B^3 &= E_B^{31} \cup E_B^{32}, \\ E_B^{31} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\beta_1}{C_B} \leq y \leq 1, \\ &\quad -\frac{(C_B - \beta_2)y}{2C_By - \beta_1} + 1 \leq x \leq 1\}, \\ E_B^{32} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq y \leq \frac{\beta_1}{C_B}, \\ &\quad 0 \leq x \leq \frac{\beta_2(1-y)}{2C_B(1-y) - (C_B - \beta_1)}\}, \\ E_B^4 &= E_B^{41} \cup E_B^{42}, \\ E_B^{41} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : \frac{\beta_1}{C_B} \leq y \leq 1, \\ &\quad 0 \leq x \leq -\frac{(C_B - \beta_2)}{\beta_1}y + 1\}, \\ E_B^{42} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : 0 \leq y \leq \frac{\beta_1}{C_B}, \\ &\quad \frac{\beta_2}{(C_B - \beta_1)}(1-y) \leq x \leq 1\}. \end{aligned} \tag{11.16}$$

11.3. Проверка свойств u - и v - стабильности в мультитерминальной игре

В этом разделе мы доказываем, что для функции w_A выполнены необходимые и достаточные условия того, что она совпадает с ценой мультитерминальной игры. А именно, для нее выполняются краевое условие (11.3) и дифференциальные неравенства (11.7), (11.8).

Доказательство

Краевое условие очевидно выполнено, так как функции $\psi_A^i, i = 1, \dots, 4$ являются нижними огибающими терминального решения $w_1(T, t, x, y)$ и, следовательно,

$$\psi_A^i(x, y) \leq \phi_i(t, t, x, y) \leq g_A(x, y), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Проверим, что дифференциальные неравенства (11.7), (11.8) выполняются для функции w_A . Нетрудно доказать, что функции $\psi_A^i, i = 1, 2, 4$, (3.19, 3.20, 3.22) удовлетворяют уравнению Гамильтона-Якоби (11.11) во внутренних точках областей $E_A^i, i = 1, 2, 4$. Можно проверить, что функция ψ_A^3 совпадает с краевой функцией g_A и удовлетворяет неравенству

$$-\frac{\partial \psi_A^3}{\partial x} x - \frac{\partial \psi_A^3}{\partial y} y + \max 0, \frac{\partial \psi_A^3}{\partial x} + \min 0, \frac{\partial \psi_A^3}{\partial y} \geq 0$$

во внутренних точках области E_A^3 .

Остается проверить дифференциальные неравенства (11.7), (11.8)) на линиях $K_A^j, j = 1, \dots, 5$. Осуществим эту проверку на линиях K_A^2, K_A^3 (см. Рис.17). В точках линии K_A^2 функции ψ_A^1 и ψ_A^4 непрерывно склеены вместе. Вычислим частные производные этих функций на этой линии

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_A^1}{\partial x} &= \frac{\alpha_1^2 x^2 - \alpha_2^2 y^2}{4C_A x^2 y}, \\ \frac{\partial \psi_A^1}{\partial y} &= \frac{\alpha_1^2 x^2 - \alpha_2^2 y^2}{4C_A x y^2}, \\ \frac{\partial \psi_A^4}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \psi_A^4}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Можно заметить, что эти производные равны нулю на линии K_A^2

$$\frac{\partial \psi_A^1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_A^4}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi_A^1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_A^4}{\partial y} = 0.$$

Другими словами, функции ψ_A^1 и ψ_A^4 здесь гладко склеены вместе. Следовательно, соотношения (11.7), (11.8) на линии K_A^2 выполняются как равенство (11.11). Аналогично можно доказать гладкое склеивание функций ψ_A^2 , ψ_A^4 , которое ведет к соотношениям (11.7), (11.8) в виде равенства (11.11) на линии K_A^3 .

Рассмотрим далее линию K_A^4 (см. Рис.17), на которой склеиваются функции ψ_A^1 и ψ_A^3 . Можно проверить, что склеивание здесь гладкое. Для частных производных, посчитанных на линии K_A^4 , имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_A^1}{\partial x} &= \frac{\partial\psi_A^3}{\partial x} = \frac{\alpha_1(\alpha_2 - C_Ax)}{2C_Ax - \alpha_2}, \\ \frac{\partial\psi_A^1}{\partial y} &= \frac{\partial\psi_A^3}{\partial y} = C_Ax - \alpha_2.\end{aligned}$$

Гладкое склеивание означает, что функция w_A удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби на линии K_A^4 . Подобным способом можно проверить гладкость функции w_A на линии K_A^5 .

Вдоль последней линии K_A^1 (см. Рис.17) склеиваются функции ψ_A^3 и ψ_A^4 . Их производные на линии K_A^1 определяются соотношениями

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_A^3}{\partial x} &= C_Ay - \alpha_1, & \frac{\partial\psi_A^4}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial\psi_A^3}{\partial y} &= \frac{\partial\psi_A^4}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

Заметим, что в случае выполнения соотношений $w_A = \psi_A^3 = \psi_A^4 = g_A$ на линии K_A^1 необходимо проверить только условие (11.7). Отметим, что в некоторой окрестности линии K_A^1 имеет место склейка на основе операции минимизации

$$w_A(x, y) = \min\{\psi_A^3(x, y), \psi_A^4(x, y)\}.$$

Следовательно, для точек $(x, y) \in K_A^1$ получаем соотношения (см. (11.6), (11.9))

$$\begin{aligned}\partial w_A(x, y)|(h_1, h_2) &= \min\{0, (C_Ay - \alpha_1)h_1\}, \\ D_* w_A(x, y)|(s_1, s_2) &= \begin{cases} 0, \\ \text{если } s_1 = \lambda(C_Ay - \alpha_1) \text{ и } s_2 = 0, \\ -\infty, \\ \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (11.17)\end{aligned}$$

здесь $0 \leq \lambda \leq 1$.

Для точек $(x, y) \in K_A^1$ и векторов $s = (s_1, s_2)$, $s_1 = \lambda(C_A y - \alpha_1)$, $s_2 = 0$ Гамильтониан $H(x, y, s)$ определяется соотношениями

$$H(x, y, s) = -s_1 x + \max\{0, s_1\} = \begin{cases} -s_1 x & \text{если } s_1 \leq 0, \\ s_1(1 - x) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что для этих величин Гамильтониан больше или равен нижней сопряженной производной (11.17). Следовательно, неравенство (11.7) на линии K_A^1 доказано.

Проверка условий (11.7), (11.8) для функции w_A во всех точках квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ завершена. Таким образом, мы доказали, что функция w_A (11.12), (11.13) является функцией цены в игре с мультитерминальным функционалом.

12. Гибкие “позитивные” управления по принципу обратной связи, генерируемые функциями цены в мультитерминальных играх

12.1. Описание оптимальных управлений по принципу обратной связи

Дадим описание гибких “позитивных” управлений по принципу обратной связи $u_A^0 = u_A^{fl} = u_A^{fl}(x, y)$, которые решают задачу гарантирующей максимизации для мультитерминального функционала $G_A(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$ (11.1) на траекториях $(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$ системы (9.1). Это максимизирующее управление построено по принципу “экстремального сдвига” в направлении градиента (обобщенного градиента) функции цены w_A мультитерминальной игры и, вследствие этого, принимает во внимание будущие моменты времени.

Видно, что частная производная $\partial w_A / \partial x$ функции цены w_A меняет свой знак на линиях K_A^2 и K_A^3 (см. Рис.17). Поэтому, оптимальное управление по принципу обратной связи u_A^0 имеет следующую структуру. Управляющий параметр $u_A^{fl} = u_A^{fl}(x, y)$ равен нулю, если текущая позиция $(x, y) = (x_1(t), y_1(t))$ лежит справа от линии $K_A = K_A^2 \cup K_A^3$, равен единице, если текущая позиция лежит слева от этой линии, и может принимать произвольные значения в точках линии K_A . А именно, если

$C_A > 0$, то

$$u_A^0 = u_A^{fl} = u_A^{fl}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \in D_A^1, \\ 1, & \text{если } (x, y) \in D_A^2, \\ \in [0, 1], & \text{если } (x, y) \in K_A. \end{cases} \quad (12.1)$$

$$\begin{aligned} D_A^1 &= D_A^{11} \cup D_A^{12}, \\ D_A^{11} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y < \frac{\alpha_1}{\alpha_2}x, \quad y \geq \frac{\alpha_1}{C_A}\}, \\ D_A^{12} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y < -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1, \quad y \leq \frac{\alpha_1}{C_A}\}, \\ D_A^2 &= D_A^{21} \cup D_A^{22}, \\ D_A^{21} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y > \frac{\alpha_1}{\alpha_2}x, \quad y \geq \frac{\alpha_1}{C_A}\}, \\ D_A^{22} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y > -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1, \quad y \leq \frac{\alpha_1}{C_A}\}, \\ K_A &= K_A^2 \cup K_A^3, \\ K_A^2 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}x, \quad y \geq \frac{\alpha_1}{C_A}\}, \\ K_A^3 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = -\frac{(C_A - \alpha_1)}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x) + 1, \quad y \leq \frac{\alpha_1}{C_A}\}. \end{aligned}$$

На рис.18 изображены линия переключения K_A и области D_A^1, D_A^2 . Направления скорости \dot{x} в областях D_A^1, D_A^2 показаны стрелками.

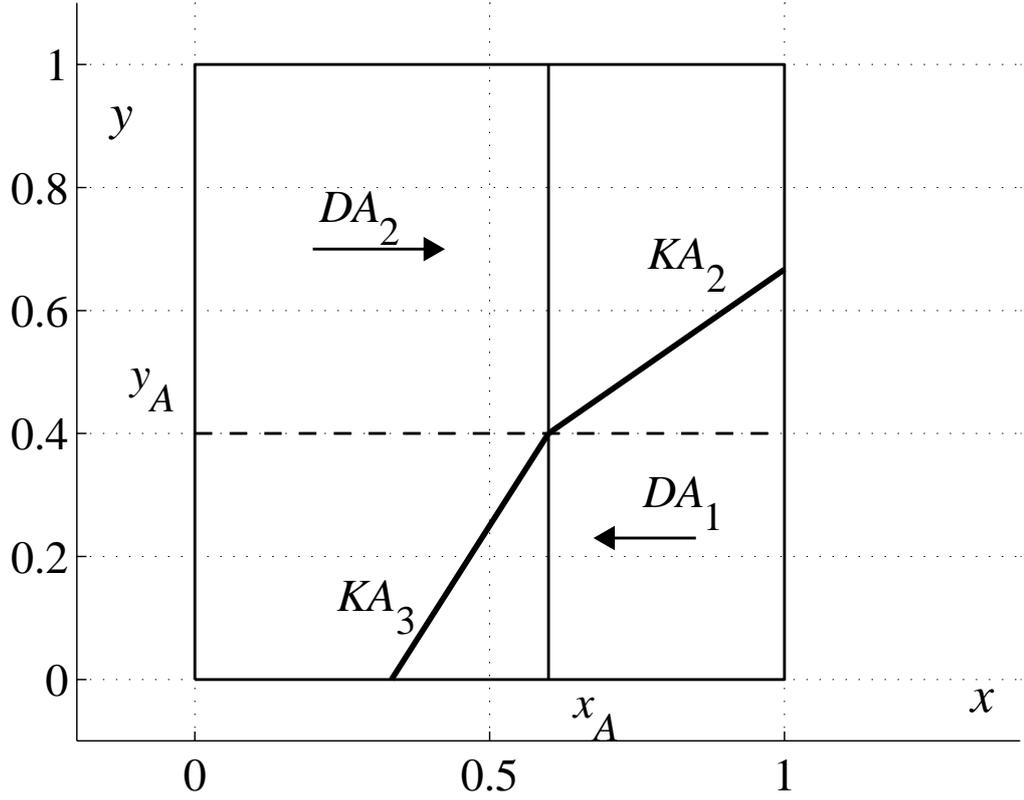


Рис. 18. Синтез гибких “положительных” управлений по принципу обратной связи u_A^{fl} .

Если $C_A < 0$, то гибкое “положительное” управление по принципу обратной связи u_A^{fl} имеет структуру (12.1), при которой линия переключения K_A и области D_A^1 , D_A^2 определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 D_A^1 &= D_A^{11} \cup D_A^{12}, \\
 D_A^{11} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y > \frac{\alpha_1}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x), y \geq \frac{\alpha_1}{C_A}\}, \\
 D_A^{12} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y > -\frac{(C_A - \alpha_1)}{\alpha_2}x + 1, y \leq \frac{\alpha_1}{C_A}\}, \\
 D_A^2 &= D_A^{21} \cup D_A^{22}, \\
 D_A^{21} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y < \frac{\alpha_1}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x), y \geq \frac{\alpha_1}{C_A}\}, \\
 D_A^{22} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y < -\frac{(C_A - \alpha_1)}{\alpha_2}x + 1, y \leq \frac{\alpha_1}{C_A}\}, \\
 K_A &= K_A^2 \cup K_A^3, \\
 K_A^2 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = \frac{\alpha_1}{(C_A - \alpha_2)}(1 - x), y \geq \frac{\alpha_1}{C_A}\}, \\
 K_A^3 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = -\frac{(C_A - \alpha_1)}{\alpha_2}x + 1, y \leq \frac{\alpha_1}{C_A}\}.
 \end{aligned}$$

Задача гарантированной оптимизации мультитерминального функционала $G_B(x_2(\cdot), y_2(\cdot))$ для второй коалиции решается аналогично. Гибкое “позитивное” управление по принципу обратной связи $v_B^0 = v_B^{fl} = v_B^{fl}(x, y)$ имеет структуру, схожую с (12.1). А именно, если $C_B > 0$, то управление v_B^{fl} описывается как

$$v_B^0 = v_B^{fl} = v_B^{fl}(x, y) \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \in D_B^1, \\ 1, & \text{если } (x, y) \in D_B^2, \\ \in [0, 1], & \text{если } (x, y) \in K_B. \end{cases} \quad (12.2)$$

$$D_B^1 = D_B^{11} \cup D_B^{12},$$

$$D_B^{11} = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y > \frac{\beta_1}{\beta_2}x, \quad x \geq \frac{\beta_2}{C_B}\},$$

$$D_B^{12} = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y > -\frac{(C_B - \beta_1)}{(C_B - \beta_2)}(1 - x) + 1, \quad x \leq \frac{\beta_2}{C_B}\},$$

$$D_B^2 = D_B^{21} \cup D_B^{22},$$

$$D_B^{21} = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y < \frac{\beta_1}{\beta_2}x, \quad x \geq \frac{\beta_2}{C_B}\},$$

$$D_B^{22} = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y < -\frac{(C_B - \beta_1)}{(C_B - \beta_2)}(1 - x) + 1, \quad x \leq \frac{\beta_2}{C_B}\},$$

$$K_B = K_B^2 \cup K_B^3,$$

$$K_B^2 = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = \frac{\beta_1}{\beta_2}x, \quad x \geq \frac{\beta_2}{C_B}\},$$

$$K_B^3 = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = -\frac{(C_B - \beta_1)}{(C_B - \beta_2)}(1 - x) + 1, \quad x \leq \frac{\beta_2}{C_B}\}.$$

Если $C_B < 0$, то управление v_B^{fl} определяется соотношением (12.2), в

котором линия переключения K_B и области D_B^1, D_B^2 заданы как

$$\begin{aligned}
D_B^1 &= D_B^{11} \cup D_B^{12}, \\
D_B^{11} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y > -\frac{(C_B - \beta_1)}{\beta_2}x + 1, \quad x \geq \frac{\beta_2}{C_B}\}, \\
D_B^{12} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y > \frac{\beta_1}{(C_B - \beta_2)}(1 - x), \quad x \leq \frac{\beta_2}{C_B}\}, \\
D_B^2 &= D_B^{21} \cup D_B^{22}, \\
D_B^{21} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y < -\frac{(C_B - \beta_1)}{\beta_2}x + 1, \quad x \geq \frac{\beta_2}{C_B}\}, \\
D_B^{22} &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y < \frac{\beta_1}{(C_B - \beta_2)}(1 - x), \quad x \leq \frac{\beta_2}{C_B}\}, \\
K_B &= K_B^2 \cup K_B^3, \\
K_B^2 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = -\frac{(C_B - \beta_1)}{\beta_2}x + 1, \quad x \geq \frac{\beta_2}{C_B}\}, \\
K_B^3 &= \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y = \frac{\beta_1}{(C_B - \beta_2)}(1 - x), \quad x \leq \frac{\beta_2}{C_B}\}.
\end{aligned}$$

12.2. Значение цены, гарантируемое оптимальным управлением по принципу обратной связи для мультитерминальных выигрышей

Оптимальные управления $u_A^{fl}(x, y)$ (12.1) гарантируют, что текущий выигрыш первой коалиции будет при длительном сроке не хуже, чем цена $v_A = D_A/C_A$, $C_A > 0$ статической матричной игры с нулевой суммой для матрицы A (назовем ее A -матричная игра). Очевидно, что этот текущий выигрыш первой коалиции не хуже значения функции w_A , т.к. выполняется неравенство

$$v_A \geq w_A(x, y), \quad \forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Верно следующее утверждение.

Утверждение 12.1 *Для любого начального положения $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ и любой траектории*

$$(x_1(\cdot), y_1(\cdot)) \in X(x_0, y_0, u_A^{fl}), \quad x_1(t_0) = x_0, \quad y_1(t_0) = y_0, \quad t_0 = 0,$$

генерированной оптимальным управлением $u_A^{fl} = u_A^{fl}(x, y)$, существует конечный момент времени $t_s \in [0, T_A]$

$$T_A = \ln(\max\{\frac{C_A}{\alpha_2}, \frac{C_A}{C_A - \alpha_2}\})$$

такой, что в этот момент траектория $(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$ входит в область E_A^4 (см. (11.13) или (11.14))

$$(x_1(t_s), y_1(t_s)) \in E_A^4,$$

где функция цены w_A равна значению v_A A -матричной игры

$$w_A(x_1(t_s), y_1(t_s)) = v_A,$$

и остается в этой области E_A^4 на бесконечном интервале времени $[t_s, +\infty)$ (и, следовательно, на интервале времени $[T_A, +\infty)$) (см. (11.12), (11.13) и Замечание 11.2). Поэтому, в соответствии с определением функции цены w_A , имеет место следующее неравенство

$$g_A(x_1(t), y_1(t)) \geq v_A, \quad (t \geq t_s)$$

и, в частности,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} g_A(x_1(t), y_1(t)) \geq v_A.$$

Доказательство.

Заметим, что область E_A^4 (см. (11.13) или (11.14)) имеет непустые пересечения со всеми линиями L_λ , $0 \leq \lambda \leq 1$

$$L_\lambda = \{(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) : y = \lambda\}.$$

Следовательно, любая возможная траектория $(x_1(\cdot), y_1(\cdot))$, генерированная оптимальным управлением с обратной связью u_A^{fl} (величина которого равна нулю или единице) пересекает эту область E_A^4 , т.к. проекция скорости на линиях L_λ для таких траекторий не равна нулю и сохраняет знак до момента пересечения траектории с областью E_A^4 .

Аналогичное утверждение может быть сформулировано для B -матричной игры.

Утверждение 12.2 Для любого начального положения $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ и любой траектории

$$(x_2(\cdot), y_2(\cdot)) \in X(x_0, y_0, v_B^{fl}), \quad x_2(t_0) = x_0, \quad y_2(t_0) = y_0, \quad t_0 = 0,$$

генерированной оптимальным управлением с обратной связью $v_B^{fl} = v_B^{fl}(x, y)$ (12.2), существуют конечное время $t_s \in [0, T_B]$

$$T_B = \ln(\max\{\frac{C_B}{\beta_1}, \frac{C_B}{C_B - \beta_1}\})$$

такое, что в это время траектория $(x_2(\cdot), y_2(\cdot))$ входит в область E_B^4 (см. (11.15) или (11.16))

$$(x_2(t_s), y_2(t_s)) \in E_B^4,$$

в которой функция цены w_B равна цене v_B B -матричной игры

$$w_B(x_2(t_s), y_2(t_s)) = v_B,$$

и остается в области E_B^4 на интервале времени $[t_s, +\infty)$ (и, следовательно, на интервале времени $[T_B, +\infty)$). Поэтому, в соответствии с определением функции цены w_B , имеет место следующее неравенство

$$g_B(x_2(t), y_2(t)) \geq v_B, \quad (t \geq t_s)$$

и, в частности,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} g_B(x_2(t), y_2(t)) \geq v_B.$$

Из утверждений 12.1 и 12.2 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 12.3 Пересечение E^0 множеств E_A^4 и E_B^4 не пусто

$$E^0 = E_A^4 \cap E_B^4 \neq \emptyset,$$

и, следовательно, оптимальные стратегии u_A^{fl}, v_B^{fl} генерируют траекторию $(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot))$, которая входит в пересечение E^0 и остается в нем на интервале времени $[T^0, +\infty)$, $T^0 = \max\{T_A, T_B\}$. В множестве E^0 выполняются неравенства

$$g_A(x^{fl}(t), y^{fl}(t)) \geq v_A, \quad g_B(x^{fl}(t), y^{fl}(t)) \geq v_B, \quad t \in [T^0, +\infty).$$

Поэтому, множество E^0 может называться благоприятной областью для обеих коалиций.

13. Равновесие по Нэшу с гибкими “позитивными” управлениями по принципу обратной связи в мультитерминальных играх

13.1. Структура равновесия по Нэшу

Построим пару управлений для равновесия по Нэшу, склеив вместе гибкие “позитивные” управления $u_A^0 = u_A^{fl}, v_B^0 = v_B^{fl}$ (12.1), (12.2) и “наказывающие” управления (стратегии наказания) $u_B^0 = u_B^{cl}, v_A^0 = v_A^{cl}$. Выберем

начальное положение $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ и параметр точности $\varepsilon > 0$. Выберем траекторию $(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot)) \in X(x_0, y_0, u_A^{fl}(\cdot), v_B^{fl}(\cdot))$, генерируемую гибкими “позитивными” управлениями u_A^{fl} и v_B^{fl} . Возьмем момент времени $T_\varepsilon > 0$ такой, что

$$\begin{aligned} g_A(x^{fl}(t), y^{fl}(t)) &> J_A^-(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot)) - \varepsilon, \\ g_B(x^{fl}(t), y^{fl}(t)) &> J_B^-(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot)) - \varepsilon, \\ t &\in [T_\varepsilon, +\infty). \end{aligned}$$

Обозначим символом $u_A^{fl, \varepsilon}(t) : [0, T_\varepsilon] \rightarrow [0, 1]$, $v_B^{fl, \varepsilon}(t) : [0, T_\varepsilon] \rightarrow [0, 1]$ пошаговые реализации стратегий u_A^{fl} , v_B^{fl} таких, что соответствующее пошаговое движение $(x_\varepsilon^{fl}(\cdot), y_\varepsilon^{fl}(\cdot))$ удовлетворяет условию

$$\max_{t \in [0, T_\varepsilon]} \|(x^{fl}(t), y^{fl}(t)) - (x_\varepsilon^{fl}(t), y_\varepsilon^{fl}(t))\| < \varepsilon.$$

Утверждение 13.1 *Пара управлений $U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon)$, $V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon)$, полученных при склейке гибких “позитивных” управлений u_A^{fl} , v_B^{fl} (12.1), (12.2) и “наказывающих” управлений u_B^{cl} , v_A^{cl} (9.8), (9.9)*

$$U^0 = u^0(t, x, y, \varepsilon) = \begin{cases} u_A^{fl, \varepsilon}(t), \\ \text{если } \|(x, y) - (x_\varepsilon^{fl}(t), y_\varepsilon^{fl}(t))\| < \varepsilon, \\ u_B^{cl}(x, y), \\ \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (13.3)$$

$$V^0 = v^0(t, x, y, \varepsilon) = \begin{cases} v_B^{fl, \varepsilon}(t), \\ \text{если } \|(x, y) - (x_\varepsilon^{fl}(t), y_\varepsilon^{fl}(t))\| < \varepsilon, \\ v_A^{cl}(x, y), \\ \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (13.4)$$

является динамическим ε -равновесием по Нэшу.

Напомним, что траектория $(x_\varepsilon^{fl}(\cdot), y_\varepsilon^{fl}(\cdot))$ является ядром динамического равновесия по Нэшу. Поэтому, ее можно назвать равновесной траекторией. Она генерируется гарантирующими управлениями u_A^{fl} and v_B^{fl} и обеспечивает лучшее значение функций выигрыша, чем статическое равновесие по Нэшу. Эта траектория окружается рисковым ε -барьером, в котором возможно доверие между коалициями.

13.2. Траектории, генерированные гибкими “позитивными” управлениями

Представляет интерес вопрос о качественном поведении траекторий, генерированных гибкими “позитивными” управлениями. Эти траектории формируют базис динамического равновесия по Нэшу (13.3), (13.4). Полная классификация возможных предельных точек, аттракторов, циклов хаотической циркуляции представляет тему исследований в дальнейших работах. Здесь же приводится следующее утверждение, вытекающее из предыдущего анализа.

Утверждение 13.2 *Значения функционалов выигрыша J_A^-, J_B^- на траектории $(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot))$, генерированной гибкими “позитивными” управлениями по принципу обратной связи u_A^{fl}, v_B^{fl} (12.1), (12.2), не хуже, чем значения этих функционалов на любой траектории, сходящейся к статическому равновесию по Нэшу $(x_B, y_A) = (\beta_2/C_B, \alpha_1/C_A)$, в котором компоненты коалиционных распределений являются неблагоприятными для противоположной коалиции. В соответствии с Утверждениями 12.1-12.3 траектории $(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot))$ входят в благоприятную область E^0 и остаются в ней на конечном интервале времени. Существуют следующие возможные качественные поведения траектории $(x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot))$ в благоприятной области E^0 :*

- она может сходиться к точке пересечения линий K_A, K_B ;
- она может приближаться к точкам, расположенным на границе квадрата (например, когда пересечение линий K_A, K_B пусто);
- она может приближаться к неантагонистическому статическому равновесию по Нэшу (в случае, когда такое равновесие существует);
- она может просто циркулировать в благоприятной области E^0 .

Замечание 13.1 *“Наказывающие” управления u_B^{cl}, v_A^{cl} (9.8), (9.9), будучи компонентами динамического равновесия по Нэшу (13.3), (13.4), ведут траектории к неблагоприятному статическому равновесию по Нэшу (x_B, y_A) .*

Замечание 13.2 *Используя конструкции гибких “позитивных” управлений, можно получить неожиданный поразительный результат: траектория равновесия $TR = (x^{fl}(\cdot), y^{fl}(\cdot))$ обеспечивает лучшее (в данном примере строго лучшее) значение выигрыша для обеих коалиций, чем значение выигрыша в статическом равновесии по Нэшу (x_B, y_A) . Следовательно, полученная равновесная траектория имеет*

лучшие свойства, чем траектории, представленные в классических моделях с репликаторной динамикой и динамикой “наилучших ответов”, которые сходятся или циркулируют вокруг статического равновесия по Нэшу (x_B, y_A) .

14. Модели динамических биматричных игр

14.1. Модель биматричной игры с одним статическим равновесием

Рассмотрим для примера матрицы выигрышей двух игроков на финансовом рынке, которые отражают данные по исследованным рынкам акций (см. money.cnn.com) и облигаций (см. www.fxstreet.ru.com/charts/bond-yield) в США. Матрица A отвечают поведению торговцев, которые играют на повышение курса и называются “быками”. Матрица B соответствует поведению торговцев, которые играют на понижение курса и называются “медведями”. Параметры матриц означают доходность акций и облигаций, выраженную в виде процентных ставок,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1.75 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$C_A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 10 - 0 - 1.75 + 3 = 11.25,$$

$$\alpha_1 = a_{22} - a_{12} = 3 - 0 = 3, \quad \alpha_2 = a_{22} - a_{21} = 3 - 1.75 = 1.25,$$

$$x_A = \frac{\alpha_2}{C_A} = \frac{1.25}{11.25} = 0.11, \quad y_A = \frac{\alpha_1}{C_A} = \frac{3}{11.25} = 0.27,$$

На рис. 19 изображены “правые” зигзаги наилучших ответов игроков и седловая точка для матрицы A .

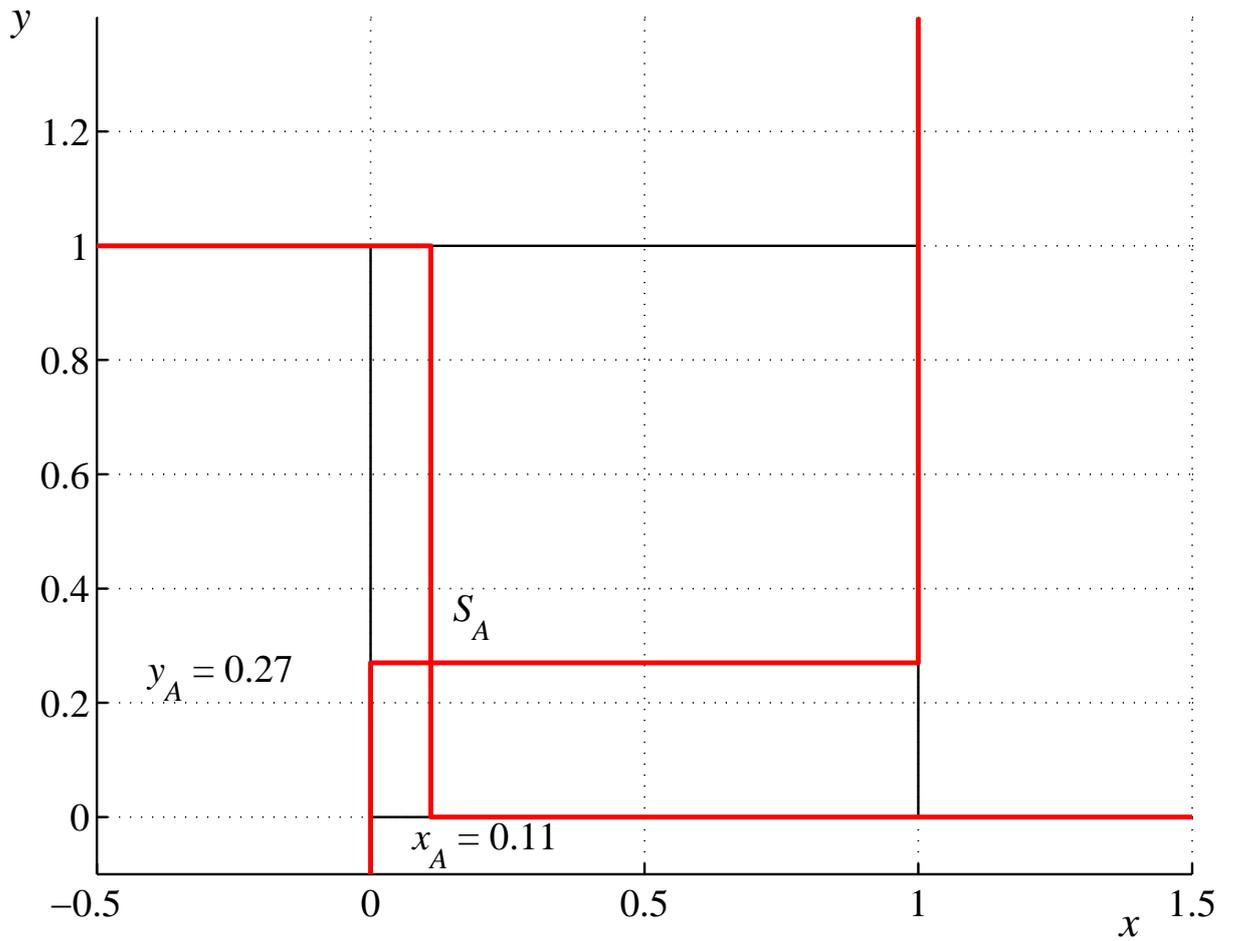


Рис. 19. Ломанные линии наилучших ответов и седловая точка для матрицы A .

$$C_B = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = -5 - 3 - 10 + 0.5 = -17.5,$$

$$\beta_1 = b_{22} - b_{12} = 0.5 - 3 = -2.5, \quad \beta_2 = b_{22} - b_{21} = 0.5 - 10 = -9.5,$$

$$x_B = \frac{\beta_2}{C_B} = \frac{-9.5}{-17.5} = 0.54, \quad y_B = \frac{\beta_1}{C_B} = \frac{-2.5}{-17.5} = 0.14.$$

На рис. 20 изображены “правые” зигзаги наилучших ответов игроков и седловая точка для матрицы A .

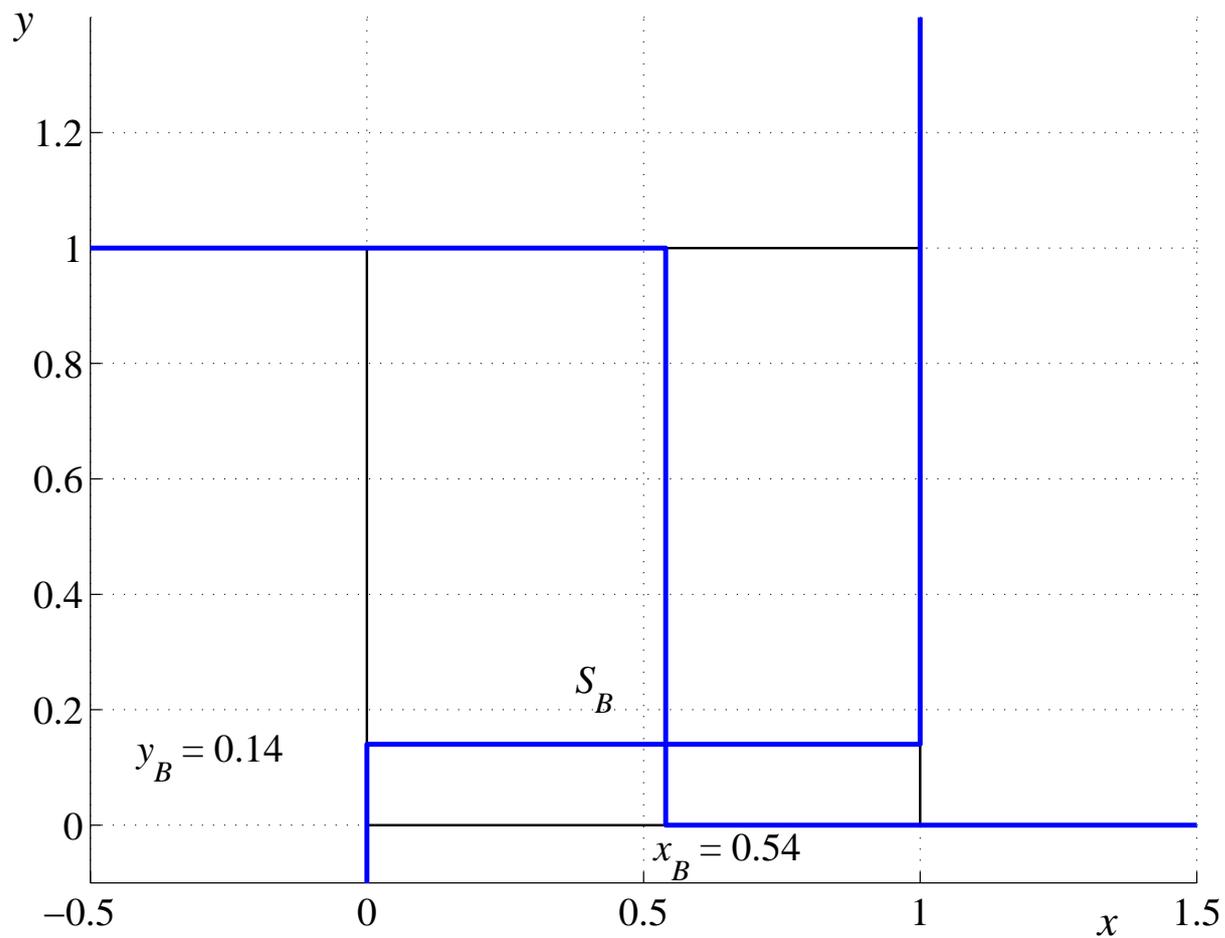


Рис. 20. Ломанные линии наилучших ответов и седловая точка для матрицы B .

Полученные результаты представлены на рис. 21, где показаны седловые точки S_A и S_B и точка равновесия по Нэшу NE .

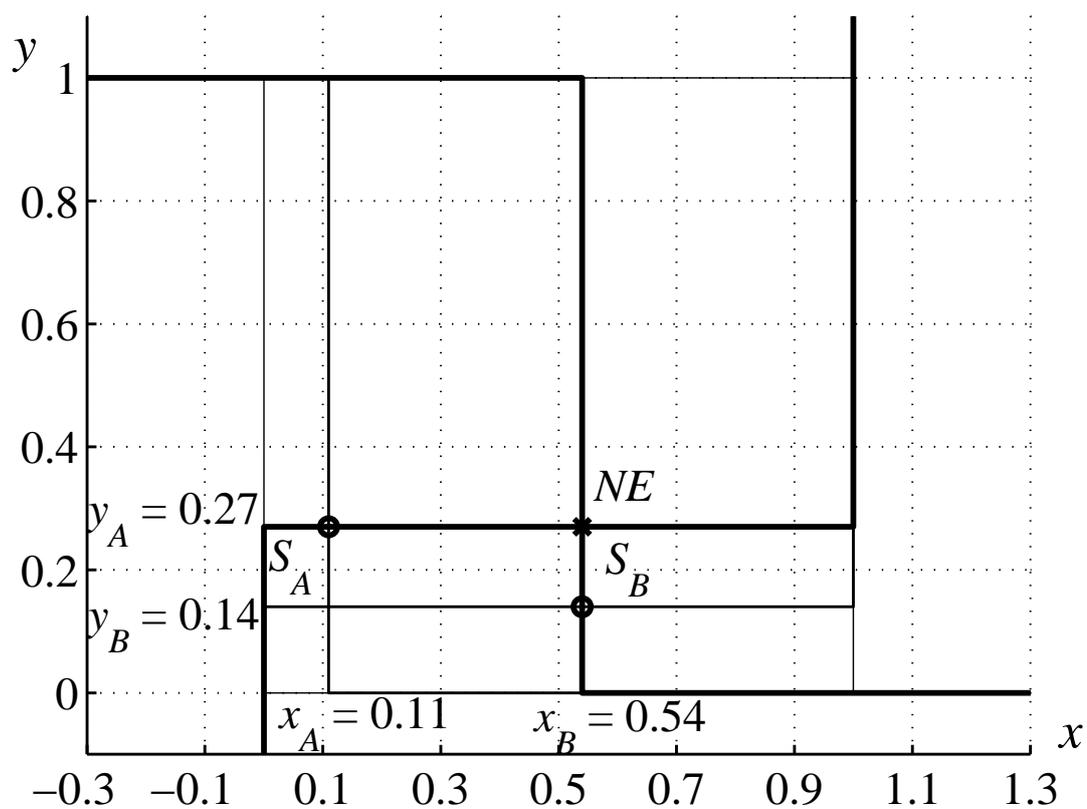


Рис. 21. Седловые точки S_A и S_B и точка равновесия по Нэшу NE .

На рис. 22 показаны ситуация равновесия по Нэшу NE , линии переключения KA и KB , точка рыночного равновесия в их пересечении ME , начальные точки I_1, I_2, I_3 и траектории алгоритма T_1, T_2, T_3 , сходящиеся к рыночному равновесию. Видно, что новая точка равновесия ME существенно отличается от точки статического равновесия по Нэшу NE , и значение обоих функционалов выигрыша в новой точке лучше, чем в старой.

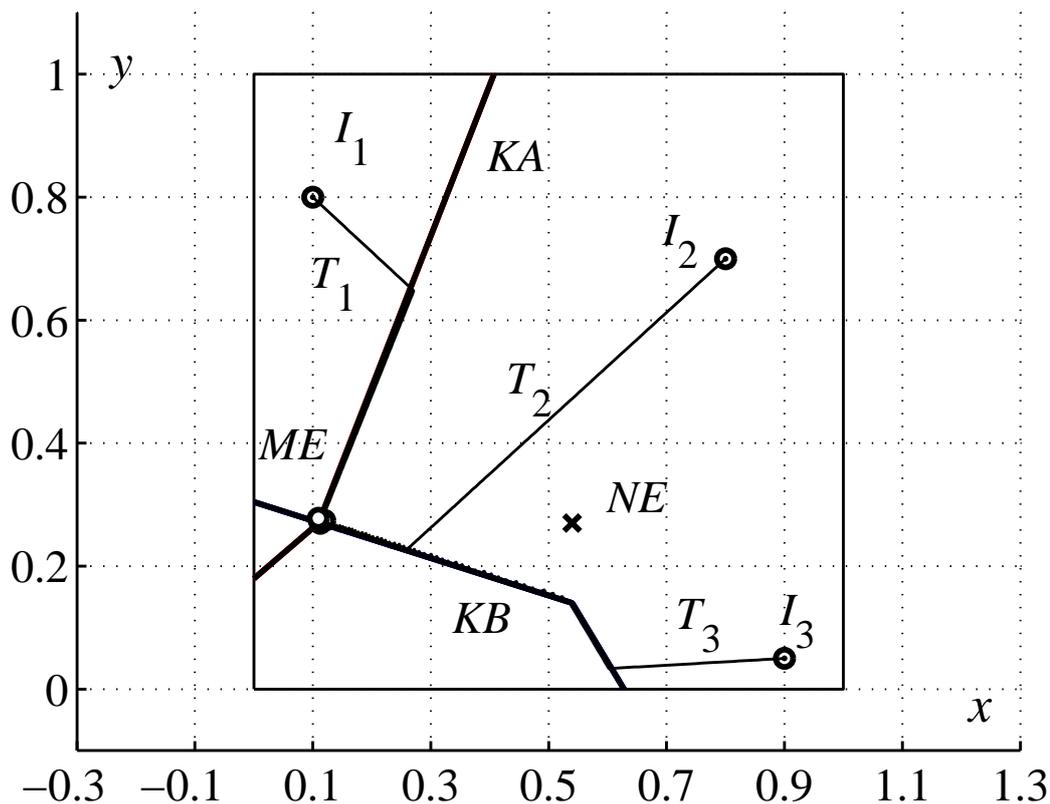


Рис. 22. Равновесные траектории в случае единственного статического равновесия по Нэшу.

14.2. Модель биматричной игры с тремя статическими равновесиями

Рассмотрим пример координационной игры. Напомним, что в таких играх функции выигрышей игроков не являются прямо противоположными и подразумевают скоординированные решения. Например, такая ситуация описывает процесс инвестирования в два аналогичных проекта.

Пусть выбор первой строки первым игроком означает инвестирование в первый проект, а второй строки - во второй проект. При этом выбор первого столбца вторым игроком означает инвестирование им в первый проект, а второго столбца во второй проект. Матрицы выигрышей первого и второго игрока задаются следующими параметрами.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 6 & 20 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 4 & 10 \end{pmatrix},$$

Значения параметров этих матриц предполагают, что оба игрока значительно выигрывают, если вкладываются в один проект, и ничего не выигрывают, или выигрывают мало, если вкладываются в разные проекты.

Параметры статической биматричной игры определяются соотношениями

$$C_A = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 10 - 0 - 6 + 20 = 24,$$

$$\alpha_1 = a_{22} - a_{12} = 20 - 0 = 20, \quad \alpha_2 = a_{22} - a_{21} = 20 - 6 = 14,$$

$$x_A = \frac{\alpha_2}{C_A} = \frac{14}{24} = 0.58, \quad y_A = \frac{\alpha_1}{C_A} = \frac{20}{24} = 0.83,$$

На рис. 23 изображены “правые” зигзаги наилучших ответов игроков и седловая точка для матрицы A .

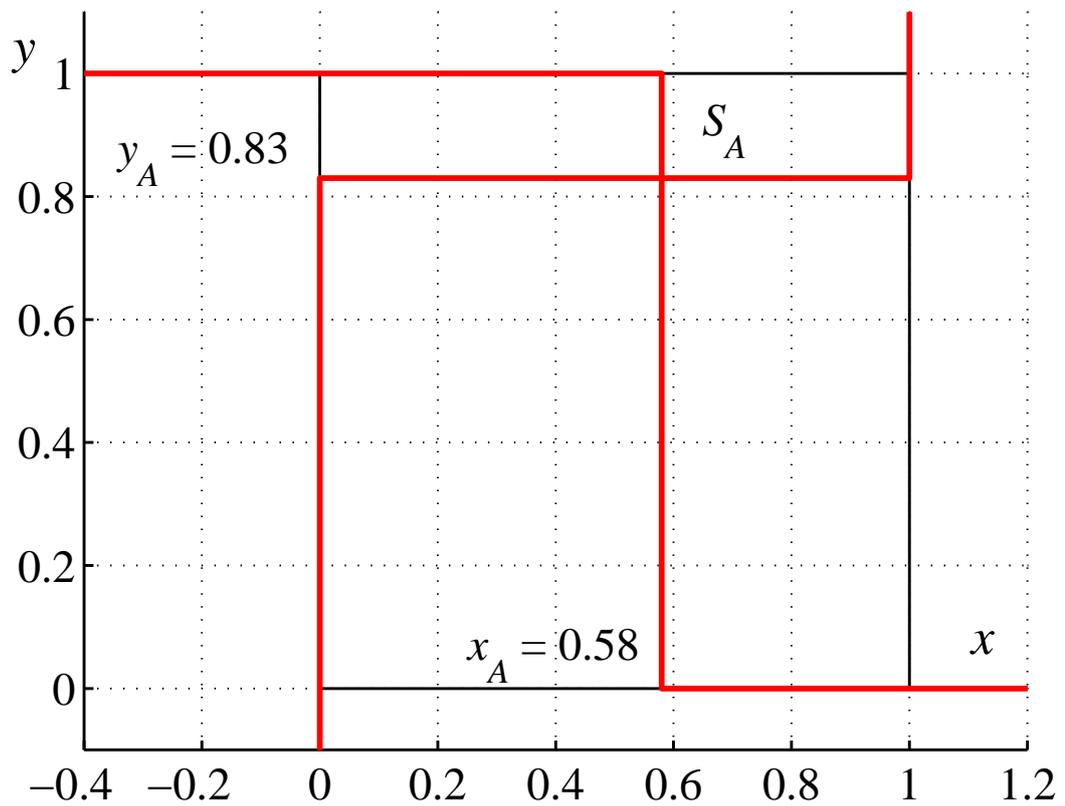


Рис. 23. Ломанные линии наилучших ответов и седловая точка для матрицы A .

$$C_B = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 20 - 0 - 4 + 10 = 26,$$

$$\beta_1 = b_{22} - b_{12} = 10 - 0 = 10, \quad \beta_2 = b_{22} - b_{21} = 10 - 4 = 6,$$

$$x_B = \frac{\beta_2}{C_B} = \frac{6}{26} = 0.23, \quad y_B = \frac{\beta_1}{C_B} = \frac{10}{26} = 0.38.$$

На рис. 24 изображены “левые” зигзаги наилучших ответов игроков и седловая точка для матрицы B .

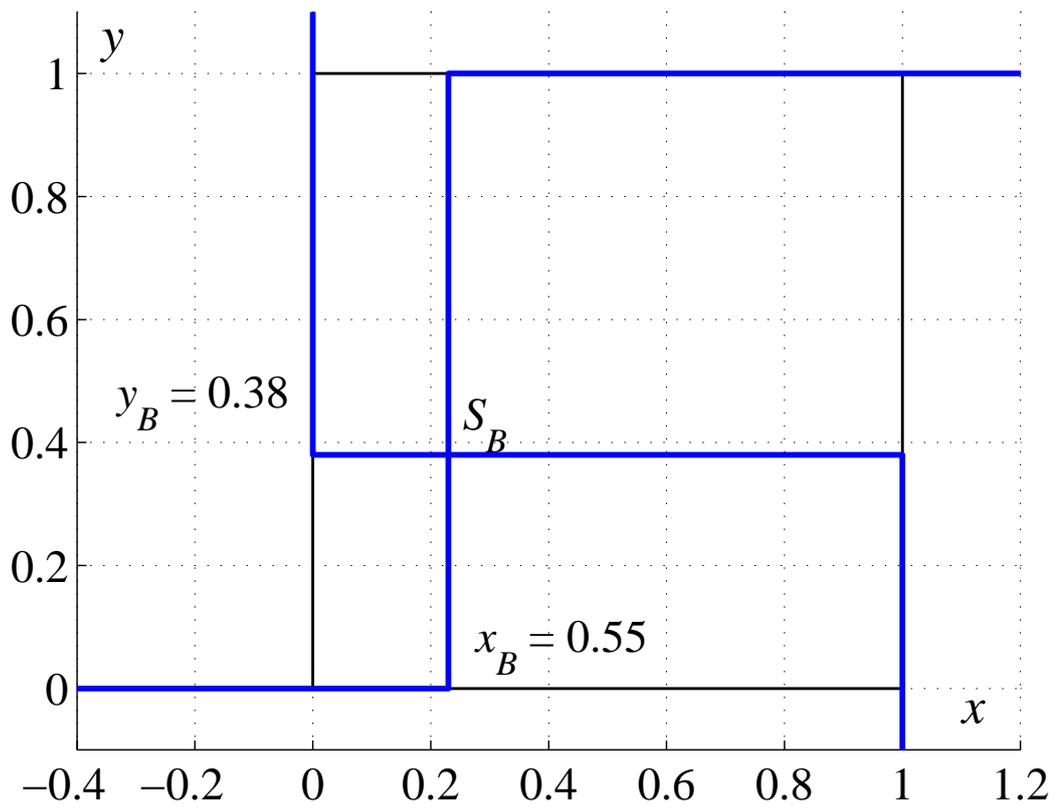


Рис. 24. Ломанные линии наилучших ответов и седловая точка для матрицы B .

На рис. 25 показан случай с тремя ситуациями равновесия по Нэшу $N1$, $N2$, $N3$. В этом случае, в отличие от предыдущего, линии переключения KA и KB сопряжены с одной и той же парой вершин квадрата с координатам $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Точка пересечения линий переключения имеется, но она не является точкой притяжения равновесных траекторий. Показаны траектории T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , которые стартуют в начальных точках I_1 , I_2 , I_3 , I_4 , лежащих в качественно различных начальных областях. Их поведение можно охарактеризовать следующим образом. Они встречаются с линиями переключения KA или KB , а затем скользят вдоль них до тех пор, пока не достигнут границ квадрата, где заканчивают движение. Приведем значения функционалов выигрыша g_A и g_B в точках статического равновесия по Нэшу $N1$, $N2$, $N3$ и в точках окончания равновесных траекторий T_1 , T_2 , T_3 , T_4 :

$$\begin{aligned}
 N1 : \quad & g_A = 26, \quad g_B = 14, \\
 N2 : \quad & g_A = 8.3616, \quad g_B = 7.6834, \\
 N3 : \quad & g_A = 10, \quad g_B = 20, \\
 T1 : \quad & g_A = 15.8292, \quad g_B = 8.3456, \\
 T2 : \quad & g_A = 16.5879, \quad g_B = 8.5863, \\
 T3 : \quad & g_A = 16.6508, \quad g_B = 8.6052, \\
 T4 : \quad & g_A = 8.7422, \quad g_B = 14.9554.
 \end{aligned}$$

Видно, что значения функционалов g_A и g_B в точках окончания равновесных траекторий T_1 , T_2 , T_3 , T_4 лучше, чем значения этих функционалов в точке статического равновесия $N2$. Что же касается значений функционалов в точках статического равновесия $N1$, $N3$, то здесь нет однозначного доминирования в сравнении с точками окончания равновесных траекторий T_1 , T_2 , T_3 , T_4 .

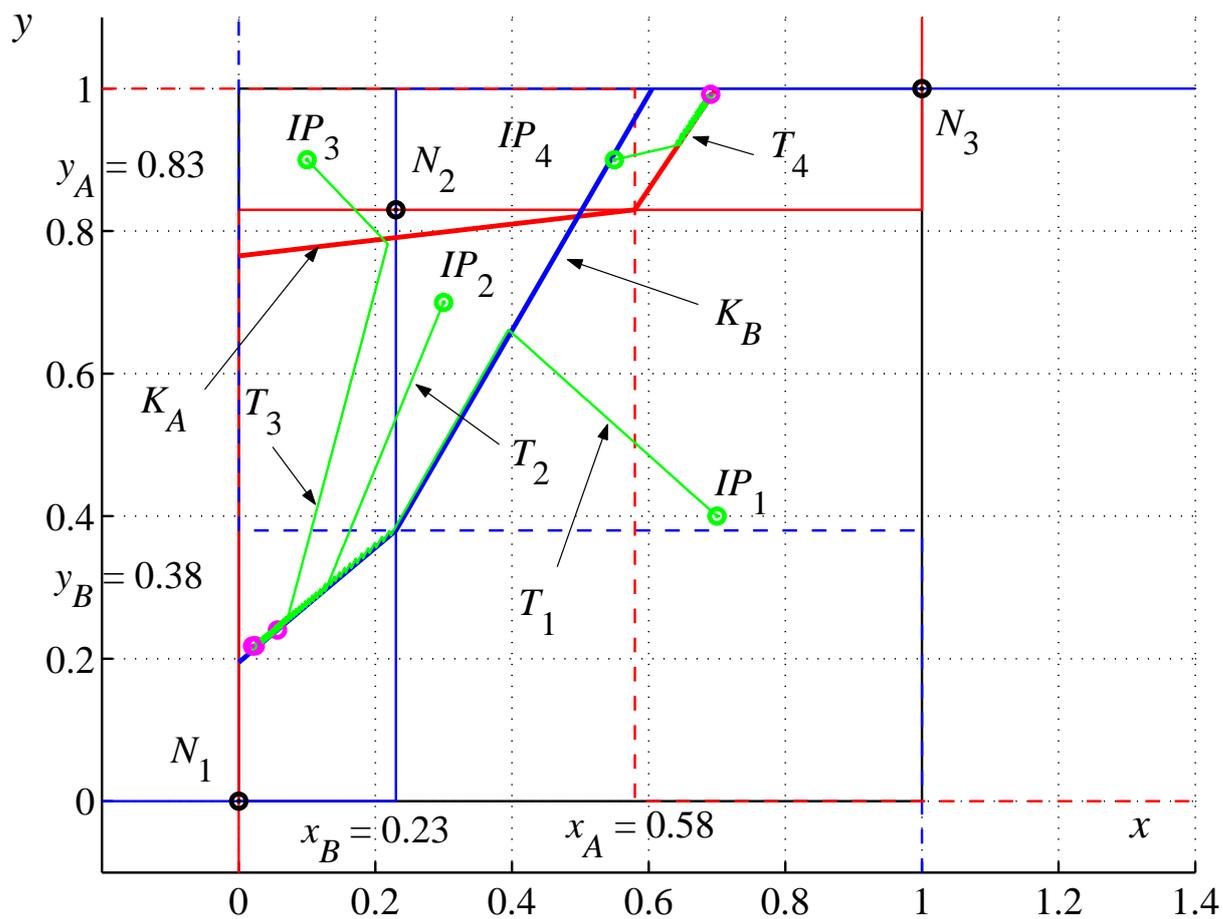


Рис. 25. Равновесные траектории в случае статического мультиравновесия по Нэшу.

Литература

1. *Адиатулина Р.А., Тарасьев А.М.*, Дифференциальная игра неограниченной продолжительности // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51, Вып. 4. С. 531–537.
2. *Адрианов А.А., Чистяков С.В.*, К теории кооперативных дифференциальных игр // Вестник СПбГУ. Сер.10. 2008. Вып.2.
3. *Айвазян С.А., Мхитарян В.С.*, Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: ЮНИТИ, 1998. 1022 с.
4. *Айзекс. Р.*, Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
5. *Альбрехт Э.Г.*, Построение приближенных решений некоторых квазилинейных дифференциальных игр // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2000. Т. 6. № 1. С. 27–38.
6. *Ананьев Б.И.*, Задачи оптимизации дифференциального включения со случайными начальными данными. Тр. ИММ УрО РАН, 2013, Т. 19. № 1, С. 12–24.
7. *Ананьевский И.М., Колмановский В.Б.*, О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием. Автоматика и телемеханика, 1989. № 9, С. 34–43.
8. *Арнольд В.И.*, Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функциональный анализ и его приложения, 2002. Т. 26. С. 1–11.
9. *Арутюнов А.В., Асеев С.М., Благодатских В.И.*, “Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления дифференциальным включением с фазовыми ограничениями” // Матем. сб., 2002. Т. 26. С. 1–11.
10. *Асеев С.М., Кряжсимский А.В.*, Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды МИАН, 2007. Т. 257 С. 5–271.
11. *Батухтин В.Д., Майборода Л.А.*, Оптимизация разрывных функций. М.: Наука, 1984. 208 с.
12. *Беллман Р.*, Динамическое программирование. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.

13. *Бердышев В.И., Костоусов В.Б.*, Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург : УрО РАН, 2007. 267 с.
14. *Бердышев Ю.И.*, Качественный анализ областей достижимости // Космические исследования, 1996. Т. 34. № 2. С. 141–144.
15. *Благодатских В.И.*, Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 2001. 239 с.
16. *Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л.*, Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел. Тр. ИММ УрО РАН, 2010. Т. 16. № 5. С. 213–222.
17. *Болтянский В.Г.*, Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1966. 308 с.
18. *Брайсон А., Хо Ю-Ши.*, Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
19. *Брыкалов С.А.*, Непрерывная обратная связь в задачах конфликтного управления // Доклады РАН, 2001. Т. 376. № 4. С. 442–444.
20. *Бурмашева Н.В., Стружанов В.В.*, Метод Ньютона–Канторовича в задаче об определении неединственных решений уравнений равновесия дискретных градиентных механических систем. Тр. ИММ УрО РАН, 2013. Т. 19, № 1, С. 244–252.
21. *Варга Дж.*, Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
22. *Васильев Ф.П.*, Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
23. *Ватанабе Ч., Решмин С.А., Тарасьев А.М.*, Динамическая модель процесса инвестиций в научно-технические разработки // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 3. С. 408–425.
24. *Воробьев Н.Н.*, Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985. 271 с.
25. *Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М.*, Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 508 с.
26. *Гамкрелидзе Р.В.*, Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилисского университета, 1975. 256 с.

27. *Гермейер Ю.Б.*, Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. 328 с.
28. *Григоренко Н.Л., Киселев Ю.Н., Лагунов Н.В., Силлин Д.Б., Тринько Н.Г.*, Методы решения дифференциальных игр. Математическое моделирование. М.: Изд-во Московского университета, 1993. 332 с.
29. *Григорьева С.В., Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.*, Конструкции теории дифференциальных игр при решении уравнений Гамильтона—Якоби // Тр. Института математики и механики УрО РАН, 2000. Т. 6. № 2. С. 320–336.
30. *Гусев М.И.*, О структуре оптимальных минимаксных оценок в задачах гарантированного оценивания // Доклады РАН, 1992. Т. 322. № 5. С. 832–835.
31. *Гусейнов Х.Г., Субботин А.И., Ушаков В.Н.*, Производные многозначных отображений и их применение в игровых задачах управления // Проблемы управления и теории информации, 1985. Т. 14. № 3. С. 1–14.
32. *Давыдов А.А., Платов А.С.*, Оптимальная эксплуатация двух структурированных по размеру конкурирующих популяций. Тр. ИММ УрО РАН, 2013. Т. 19, № 4, С. 89–94
33. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.*, Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
34. *Дмитрук А.В.*, Аппроксимационная теорема для нелинейной управляемой системы со скользящими режимами. Тр. МИАН, 2007. Т. 256, С. 102–114.
35. *Жуковский В.И., Чикрий А.А.*, Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова думка, 1994. 320 с.
36. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.*, Импульсные процессы: модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
37. *Зеликин М.И.*, Оптимальное управление и вариационное исчисление. Изд. 2. М.: УРСС, 2004. 160 с.
38. *Интрилигатор М.*, Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: АЙРИС ПРЕСС, 2002. 566 с.

39. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.*, Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
40. *Камнева Л.В.*, Достаточные условия стабильности для функции цены дифференциальной игры в терминах сингулярных точек // Прикладная математика и механика, 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 366–383.
41. *Кандоба И.Н.*, Формирование финансовой политики фирмы на краткосрочную перспективу // Изв. Урал. гос. экон. ун-та, 2006. № 1.
42. *Ким А.В., Пименов В.Г.*, i -Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Ижевск: Изд-во FXD R&C Dynamics, 2004. 256 с.
43. *Кларк Ф.*, Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
44. *Клейменов А.Ф.*, Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 184 с.
45. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.*, Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
46. *Короткий А.И.*, Разрешимость в слабом смысле одной краевой задачи, описывающей тепловую конвекцию. Тр. ИММ УрО РАН, 2010. Т. 16, № 2, С. 121–132.
47. *Костоусова Е.К.*, О полиэдральных оценках множеств достижимости дифференциальных систем с билинейной неопределенностью. Тр. ИММ УрО РАН, 2012. Т. 18, № 4, С. 195–210.
48. *Красовский А.А., Тарасьев А.М.*, Динамическая оптимизация инвестиций в моделях экономического роста // Автоматика и телемеханика, 2007. № 10. С. 38–52.
49. *Красовский А.Н.*, Управление на минимакс интегрального функционала // Доклады АН СССР, 1991. Т. 320. № 4. С. 785–788.
50. *Красовский Н.А.*, Разработка алгоритмов и программных средств для моделирования сбалансированного экономического развития // XVI Уральская международная конференция молодых ученых по приоритетным направлениям развития науки и техники. Екатеринбург, 2009.

51. *Красовский Н.А., Кряжсимский А.В., Тарасьев А.М.*, Уравнения Гамильтона–Якоби в эволюционных играх, Тр. ИММ УрО РАН, Т. 20, № 3, 2014, С. 114–131.
52. *Красовский Н.А., Тарасьев А.М.*, Поиск точек максимума векторного критерия с декомпозиционными свойствами, Тр. ИММ УрО РАН, Т. 15, № 4, 2009, С. 167–182.
53. *Красовский Н.А., Тарасьев А.М.*, Декомпозиционные методы нахождения точек максимума векторного критерия // Актуальные проблемы теории устойчивости и управления: сб. тез. докл. Междунар. конференции. Екатеринбург, 2009. С. 93-95.
54. *Красовский Н.А., Тарасьев А.М.*, Динамическая модель поиска равновесных состояний с конкурентными и кооперативными характеристиками // Проблемы динамич. упр.: сб. науч. тр. / МГУ.- МАКС Пресс, 2010.- Вып.5.- С.127-156.
55. *Красовский Н.А., Тарасьев А.М.*, Декомпозиционный алгоритм поиска равновесия в динамической игре // Мат. теория игр и ее прил. 2011. Т. 3, № 4. С.49–88.
56. *Красовский Н.А., Тарасьев А.М.*, Алгоритмы построения равновесных траекторий в динамических биматричных играх // Динамика систем и процессы управления: сб. тез. докл. Междунар. конференции. Екатеринбург, 2014. С. 119-121.
57. *Красовский Н.Н.*, Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
58. *Красовский Н.Н.*, Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
59. *Красовский Н.Н.*, Игровое управление в дифференциальных эволюционных системах // Доклады АН СССР, 1976. Т. 227. № 5. С. 1049–1052.
60. *Красовский Н.Н.*, Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
61. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.*, Линейные дифференциально-разностные игры // Доклады АН СССР, 1971. Т. 197. № 4. С. 777–780.
62. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.*, Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

63. *Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.*, Стохастический программный синтез для позиционной дифференциальной игры // Докл. АН СССР, 1981. Т. 259, № 1. С. 24–27.
64. *Крушвиц Л.*, Финансирование и инвестиции. С.Пб.: ПИТЕР, 2000. 400 с.
65. *Кряжсимский А.В., Осипов Ю.С.*, О дифференциально-эволюционных играх // Тр. Мат. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 257–287.
66. *Куржанский А.Б.*, Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 390 с.
67. *Куржанский А.Б.*, О задаче управления эллипсоидальным движением. Тр.МИАН, , 277 (2012), 168–177.
68. *Куржанский А.Б., Никонов О.И.*, Эволюционные уравнения для пучков траекторий синтезированных систем управления // Доклады РАН, 1993. Т. 333. № 5.
69. *Ледяев Ю.С., Мищенко Е.Ф.*, Экстремальные задачи в теории дифференциальных игр // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова, 1988. Т. 85. С. 147–170.
70. *Лейтман Дж.*, Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука, 1968. 190 с.
71. *Лукоянов Н.Ю.*, К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикладная математика и механика, 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 188–198.
72. *Мазалов В.В.*, Игровые моменты остановки. Н., Наука, 1987.
73. *Максимов В.И.*, О существовании седловой точки в дифференциально-разностной игре сближения-уклонения // Прикладная математика и механика, 1978. Т. 42. Вып. 1.
74. *Меликян А.А.*, Обобщенные характеристики уравнений в частных производных первого порядка. Приложения к задачам теории управления и дифференциальным играм / пер. с англ. под ред. В.С.Пацко. М. - Ижевск: Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт компьютерных исследований, 2014. 450 с.

75. *Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П.*, Принцип максимума в оптимальном управлении. Мехмат МГУ, Москва, 2004. 168 с.
76. *Мищенко Е.Ф.*, Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр // Изв. АН СССР: Техн. кибернетика, 1971. № 5. С. 3–9.
77. *Мордухович Б.Ш.*, Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 360 с.
78. *Никольский М.С.*, Об альтернированном интеграле Л. С. Понтрягина, Матем. сб., 116(158):1(9) (1981), 136–144.
79. *Никольский М.С.*, Приближенное вычисление точек равновесия по Нэшу для игр двух игроков, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет., 2014, № 2, 25–28.
80. *Никонов О.И.*, О программном и позиционном равновесии в многокритериальных игровых задачах управления в условиях неопределенности // Дифференц. уравнения, 1981. Т. 17, № 4. С. 629–637.
81. *Овсеевич А.И.*, Структура аттрактора форм множеств достижимости. Функциональный анализ и его приложения, 2010. Т. 44, № 2, С. 74–81
82. *Осипов Ю.С.*, Альтернатива в дифференциально-разностной игре // Доклады АН СССР, 1971. Т. 197. № 5. С. 1022–1025.
83. *Пацко В.С.*, Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх // Современная математика и ее приложения, Тбилиси, 2005, Т. 23, С. 79–122.
84. *Петров Н.Н.*, “Мягкая” поимка в примере Л. С. Понтрягина со многими участниками // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 759–770.
85. *Петросян Л.А., Захаров В.В.*, Математические модели в экологии. Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петербургского госуниверситета, 1997. 254 с.
86. *Пименов В.Г.*, Функционально-дифференциальные уравнения: численные методы. Екатеринбург: Изд-во Уральского госуниверситета, 1998. 80 с.

87. *Половинкин Е.С., Иванов Г.Е., Балашов М.В., Константинов Р.В., Хорев А.В.*, Об одном алгоритме численного решения линейных дифференциальных игр, Матем. сб., 192:10 (2001), 95–122.
88. *Поляк Б.Т.*, Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
89. *Понтрягин Л.С.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974. 331 с.
90. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.*, Математическая теория оптимальных процессов. М: Наука, 1969. 392 с.
91. *Пшеничный Б.Н.*, Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М: Наука, 1980. 319 с.
92. *Рокафеллар Р.Т.*, Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
93. *Серков Д.А.*, О неулучшаемости стратегий с полной памятью в задачах оптимизации гарантированного результата. Тр. ИММ УрО РАН, 2014. Т. 20, № 3, С. 204–217.
94. *Сесекин А.Н., Ченцов А.А., Ченцов А.Г.*, Об одной задаче маршрутизации “на узкие места”. Тр. ИММ УрО РАН, 2010. Т. 16, № 1, С. 152–170.
95. *Субботин А.И.*, Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука. 1991. 214 с.
96. *Субботин А.И.*, Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Москва–Ижевск: Институт компьютер. исслед. 2003. 336 с.
97. *Субботин А.И., Ченцов А.Г.*, Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
98. *Субботин А.И., Тарасьев А.М.*, Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, 3. С. 559–564.
99. *Субботина Н.Н.*, Метод динамического программирования для класса локально–липшицевых функций // Доклады РАН, 2003. Т. 389. № 2. С. 1–4.

100. *Субботина Н.Н.*, Метод характеристик для уравнений Гамильтона–Якоби и его приложения в динамической оптимизации // Современная математика и ее приложения. Серия: Дифференциальные уравнения. Тбилиси: Издательство института кибернетики Академии наук Грузии, 2004. 132 с.
101. *Тарасьев А.М.*, Аппроксимационные схемы построения минимаксных решений уравнений Гамильтона–Якоби // Прикладная математика и механика, 1994. Т. 58. Вып. 2. С. 22–36.
102. *Тарасьев А.М., Усова А.А.*, Построение регулятора для гамильтоновой системы двухсекторной модели экономического роста. // Труды Математического института им. В.А. Стеклова, 2010. Т. 271, С. 278–298.
103. *Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.*, Аппроксимационные схемы и конечно–разностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби // Изв. РАН: Техн. кибернетика, 1994. № 3. С. 173–185.
104. *Тимофеева Г.А.*, Оптимальные и субоптимальные решения стохастически неопределенной задачи квантильной оптимизации. Автоматика и телемеханика, 2007, № 7, С. 31–43.
105. *Тонков Е.Л.*, Динамические задачи выживания // Вестник Пермского гос. тех. ун-та. Функцион.–дифференц. уравнения (спец.вып.), 1997. № 4. С. 138–148.
106. *Третьяков В.Е.*, К теории стохастических дифференциальных игр // Доклады АН СССР, 1983. Т. 269. № 3. С. 1049–1053.
107. *Ухоботов В.И.*, Синтез гарантированного управления на основе аппроксимационной схемы // Тр. Института математики и механики УрО РАН, 2000. Т. 6. № 1. С. 239–246.
108. *Ушаков В.Н.*, К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения–уклонения // Изв. АН СССР: Технич. кибернетика, 1980. № 4. С. 29–36.
109. *Ушаков В.Н., Лебедев П.Д.*, Об одном варианте метрики для неограниченных выпуклых множеств // Вестник ЮУрГУ. Серия "Математика. Механика. Физика." 2013. Т 5, № 1. С. 40–49.

110. *Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Лебедев П.Д.*, Дефект стабильности в игровой задаче о сближении в момент // Вестник Удмуртского университета, 2010. Вып. 3. С. 87–103.
111. *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.*, Методы негладкого анализа при построении аппроксимаций решений дифференциальных игр и задач управления // Вестник СПбГУ. 2013. Сер. 10. Вып.3. С. 157-167.
112. *Филлипов А.Ф.*, Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
113. *Филлипова Т.Ф.*, Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением. Тр. ИММ УрО РАН, 2009. Т. 15, № 4, С. 262–269.
114. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
115. *Ченцов А.Г.*, О структуре одной игровой задачи сближения // Доклады АН СССР, 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275.
116. *Черноусько Ф.Л.*, Декомпозиция и синтез управления в нелинейных динамических системах, Оптимальное управление и дифференциальные уравнения, Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, 211, Наука, Физматлит, М., 1995, 457–472.
117. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.*, Игровые задачи управления и поиска. М.:Наука, 1978. 270 с.
118. *Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.*, Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
119. *Четыркин Е.М.*, Финансовая математика. М.: Дело, 2003.
120. *Чистяков С.В.*, Операторы значения в теории дифференциальных игр. Изв. ИМИ УдГУ, 2006. Т. 3(37), С. 169–172.
121. *Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Дж.В.*, Инвестиции. М.: ИНФРА-М. 2010.
122. *Ширяев А.Н.*, Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС. 2004. 1056 с.

123. *Шориков А.Ф.*, Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Уральского гос. университета, 1997. 248 с.
124. *Ane, B.K., Tarasyev, A.M., Watanabe, C.*, Construction of Nonlinear Stabilizer for Trajectories of Economic Growth // Journal of Optimization Theory and Applications, 2007. Vol. 134, No. 2 P. 303–320.
125. *Ane, B.K., Tarasyev, A.M., Watanabe, C.*, Impact of Technology Assimilation on Investment Policy: Dynamic Optimization and Econometric Identification // Journal of Optimization Theory and Applications, 2007. Vol. 134, No. 2 P. 321–338.
126. *Arrow, K.J.*, Application of Control Theory to Economic Growth // Mathematics of the Decision Sciences, 1968. No 2. P. 85–119.
127. *Ayres, R.U., Warr, B.*, Accounting for Growth: the Role of Physical Work // Structural Change and Economic Dynamics, 2005. Vol. 16. No. 2. P. 181–209.
128. *Aubin J.-P.*, A Survey of Viability Theory, SIAM J. Control and Optimization. 1990. Vol. 28, No. 4, Pp. 749–788.
129. *Aubin, J.P.*, Viability Theory. Boston: Birkhauser, 1991.
130. *Aumann, R.J., Shapley, L.S.*, Values of Non-Atomic Games, Princeton University Press, Princeton, 1974.
131. *Avenhaus, R.*, Applications of Inspection Games // Mathematical Modeling and Analysis, 2004. Vol. 9. No. 3. P. 179–192.
132. *Axelrod R.*, The Evolution of Cooperation. New York: Basic Books, 1984.
133. *Bardi, M., Dolcetta, I.C.*, Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations. Boston: Birkhauser, 1997. 596 P.
134. *Bardi, M., Evans, L.C.*, On Hopf’s Formulas for Solutions of Hamilton–Jacobi Equations // Nonlinear Anal., Theory, Meth., Appl., 1984. Vol. 8. No. 11. P. 1373–1381.
135. *Barrett S.*, International Environmental Agreements as Games. In Conflicts and Cooperation in Managing Environmental Resources (R. Pethig ed.). Berlin: Springer Verlag, 1990.

136. *Barron, E.N., Jensen, R.*, The Pontryagin Maximum Principle from Dynamic Programming and Viscosity Solutions to First-order Partial Differential Equations // Trans. Amer. Math. Society, 1986. Vol. 298. No. 2. P. 635–641.
137. *Basar T., Olsder G.J.*, Dynamic Noncooperative Game Theory. London: Academic Press, 1982. 519 p.
138. *Bensoussan, A.*, Perturbation Methods in Optimal Control. New York, Chichester: Wiley–Gautier, 1988. 574 P.
139. *Berkovitz, L.D.*, Optimal Feedback Control // SIAM J. Contr. Optim., 1989. Vol. 27. No. 5. P. 991–1006.
140. *Bernhard, P., Melikyan, A.*, Geometry of Optimal Trajectories Around a Focal Singular Surface in Differential Games. Applied Mathematics and Optimization, 2005. Vol. 52. P. 23–37.
141. *Cannarsa, P., Frankowska, H.*, Some Characterization of Optimal Trajectories in Control Theory // SIAM J. Contr. Optim., 1991. Vol. 29. P. 1322–1347.
142. *Capuzzo Dolcetta I.* On a Discrete Approximation of the Hamilton–Jacobi of Dynamic Programming // Applied Mathematics and Optimization 1983. Vol. 4. P. 367–377
143. *Cellini, R., Lambertini, L., and Leitmann, G.*, Degenerate Feedback and Time Consistency in Differential Games // Modeling and Control of Autonomous Decision Support Based Systems, Shaker Verlag, Aachen, (eds. E. Hofer, and E. Reithmeier), 2005. P. 185–192.
144. *Cesari, L.*, Optimization Theory and Applications. Problems with Ordinary Differential Equations. Springer, New York, 1983.
145. *Chander P., Tulkens H.*, Theoretical Foundations of Negotiations and Cost Sharing in Transfrontier Pollution Problems. European Economic Review, 1992. Vol. 36, P. 388–398.
146. *Chow, J.H., Kokotovich, P.V.*, Near-Optimal Feedback Stabilization of a Class of Nonlinear Singularly Perturbed Systems. SIAM Journal on Control and Optimization, 1978. Vol. 16, P. 756–770.
147. *Clarke, F.H., Ledyaev, Yu.S., Stern, R.J., Wolenski, P.R.*, Non-smooth Analysis and Control Theory. New York: Springer–Verlag, 1998. 278 P.

148. *Colonius, F.*, Optimal Periodic Control. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 1313. Berlin: Springer–Verlag, 1988.
149. *Crandall M.G., Lions P.L.*, Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations, Trans. Amer. Math. Soc., 1983, Vol. 277, No. 4. Pp. 1–42.
150. *Deissenberg, Ch., and Hartl, R., eds.*, Optimal Control and Dynamic Games: Applications in Finance, Management Science, and Economics, Springer, 2005.
151. *Dolcetta, I.C.*, Recent Mathematical Methods in Dynamic Programming. Springer-Verlag, 1985. 202 p.
152. *Ehtamo H., Hamalainen R.P.*, A Cooperative Incentive Equilibrium for a Resource Management Problem // J. Econom. Dynam. Control. 1993. Vol. 17. P. 659–678.
153. *Ellerman A.D., Decaux A.*, Analysis of Post-Kyoto CO2 Emissions Trading Using Marginal Abatement Curves // Joint Program Report Series. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1998. Report No. 40. 32 p.
154. *Evans, L.C.*, Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19. Amer. Math. Society: Providence, Rhode Island, 1998. 662 P.
155. *Falcone M.* A numerical Approach to the Infinite Horizon Problem of Deterministic Control Theory // Applied Mathematics and Optimization, 1987. Vol. 15, P. 1–13.
156. *Feichtenger, G., Wirl, F.*, Intrafamilial Consumption and Saving Under Altruism and Wealth Considerations // Economica, 2002. Vol. 69, P. 93–111.
157. *Feichtinger G., Veliov V* On a Distributed Control Problem Arising in Dynamic Optimization of a Fixed-size Population. // SIAM J. Optim., 2007. Vol. 18(3), P. 980–1003.
158. *Fleming, W.H., Soner H.M.*, Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. New York: Springer–Verlag, 1993.
159. *Friedman, A.*, Differential Games. New York: Wiley Interscience, 1971.
160. *Friedman D.*, Evolutionary Games in Economics, Econometrica. 1991. Vol. 59, No. 3. Pp. 637–666.

161. *Fudenberg D., Kreps D.M.*, Learning mixed equilibria // Games and Econ. Behavior. 1993. Vol. 5. P. 320–367.
162. *Greene, W.H.*, Econometric Analysis, 3rd Edition, Prentice-Hall, 1997.
163. *Grossman, G.M., Helpman, E.*, Innovation and Growth in the Global Economy. MIT Press, Cambridge, MA, 1991.
164. *Haddad, G.*, Monotone Trajectories of Differential Inclusions and Functional Differential Inclusions with Memory // Israel J. Math., 1981. Vol. 39. P. 83–100.
165. *Haurie, A., Zaccour, G.*, Differential Game Models of Global Environment Management // Annals of the International Society of Dynamic Games, 1995. Vol. 2. P. 3–24.
166. *Hoel M.*, Global Environmental Problems: the Effect of Unilateral Actions Taken by one Country. Journal of Environmental Economics and Management. 1991. Vol. 20, 55–70 p.
167. *Hofbauer J., Sigmund K.*, The Theory of Evolution and Dynamic Systems. Cambridge, Cambridge Univ. Press. 1988. 341 p.
168. *Hoffbauer J., Sigmund K.*, Evolutionary games and population dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 323 p.
169. *Intriligator M.*, Mathematical Optimization and Economic Theory, Prentice-Hall. N.Y. 1971. 529 p.
170. *Ishii, H., Lions, P.-L.*, Viscosity Solutions of Fully Nonlinear Second-order Elliptic Partial Differential Equations. Journal of Differential Equations, 1990. Vol. 83, Issue 1, P. 26–78.
171. *Isidori, A.*, Nonlinear Control Systems. New York: Springer-Verlag, 1995. (3rd edition).
172. *Kalman, R.E.*, Contribution to the Theory of Optimal Control // Bullet. Soc. Math. Mech., 1960. Vol. 5. P. 102–119.
173. *Kaniovski Yu.M., Young H.P.*, Learning Dynamics in Games with Stochastic Perturbations // Games and Econ. Behavior. 1995. Vol. 11. P. 330–363.
174. *Kantorovich, L.V., Makarov, V.L.*, Growth Models and their Application to Long-term Planning and Forecasting // In: Long-term Planning and Forecasting, Proc. Conf. Macmillan Press, 1976.

175. *Koopmans, T.C.*, Objectives, Constraints, and Outcomes in Optimal Growth Models // *Econometrica*, 1967. Vol. 35. No. 1. P. 1–15.
176. *Krabs, W., Pickl, S.W., Pickl, S.*, Analysis, Controllability and Optimization of Time-Discrete Systems and Dynamical Games, New York: Springer–Verlag Inc., 2003. 186 P.
177. *Krasovskii, A.A.*, Assessment of the Impact of Aggregated Economic Factors on Optimal Consumption in Models of Economic Growth // IIASA Working Paper IR-06-050, Laxenburg: IIASA, 2006. 46 P.
178. *Krasovskii, A., Kryazhimskiy, A., Tarasyev, A.*, Optimal Control Design in Models of Economic Growth // Programme and Abstracts of the 7th International EUROGEN'2007 Conference “Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control with Applications to Industrial and Societal Problems”, University of Jyvaskyla, 2007. P. 16-17
179. *Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.*, Control Under Lack of Information. Boston etc.: Birkhauser, 1994. 320 p.
180. *Krasovskii, N.N., Subbotin A.I.*, Game–Theoretical Control Problems. New York: Springer–Verlag, 1988. 518 P.
181. *Kryazhimskii, A., Nentjes, A., Shibayev, S., Tarasyev, A.*, Modeling Market Equilibrium for Transboundary Environmental Problem // *Nonlinear Analysis*, 2001. Vol. 47. P. 991–1002.
182. *Kryazhimskii, A., Nentjes, A., Shibayev, S., Tarasyev, A.*, Searching Market Equilibria under Uncertain Utilities // IIASA Interim Report IR-98-007. Laxenburg: IIASA, 1998. 24 p.
183. *Kryazhimskii A.V., Tarasyev A.M.*, Equilibrium and Guaranteeing Solutions in Evolutionary Nonzero Sum Games // IIASA Interim Report IR-98-003. Laxenburg: IIASA, 1998. 56 p.
184. *Kryazhimskii, A.V., Watanabe, C.*, Optimization of Technological Growth, GENDAITOSHO, Kanagawa, 2004.
185. *Kurzhanski, A.B., Valyi, I.*, Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston (ser. SCFA): Birkhauser, 1996
186. *Kurzhanski, A.B., Varaiya, P.*, Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation. Boston (ser. SCFA): Birkhauser, 2014. 445 p.

187. *Lakshmikantham, V., Leela, S.*, Differential and Integral Inequalities. V. 2. New York: Academic Press, 1969.
188. *Lambertini, L.*, Exploration For Nonrenewable Resources In A Dynamic Oligopoly: An Arrovian Result. International Game Theory Review (IGTR), World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Vol. 16(02), 2014. Pages 1440011-1-1.
189. *Lions, P.L.*, Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi Equations. Research Notes in Mathematics, Vol. 69. Boston: Pitman, 1982. 318 P.
190. *Loginov, M.I.*, Regularity Conditions for a Differential Game With Integral Constraints on the Control Resources. Journal of Computer and Systems Sciences International. 1996. Vol. 34. No. 2. P. 134–141.
191. *Maeler K.G.*, The Acid Rain Game. In Valuation Methods and Policy Making (H. Folmer and E. van Ireland eds.) in Environmental Economics. Amsterdam: Elsevier, 1989.
192. *Markowitz H.M.*, Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. New York: John Wiley and Sons, 1959.
193. *Nentjes A.*, An Economic Model of Transfrontier Pollution Abatement. In public finance, trade and development / Ed. V. Tanzi Detroit Mich.: Wayne State University Press, 1993. P. 243–261.
194. *Nentjes A.*, Control of Reciprocal Transboundary Pollution and Joint Implementation. In Economic Instruments for Air Pollution Control (G. Klaassen and F. Foersund eds.). Kluwer, 1994. 209–230 p.
195. *Nordhaus, W.D.*, Managing the Global Commons. The Economics of Climate Change. MIT Press, Cambridge, MA, 1994.
196. *Nowak M., Sigmund K.*, The Evolution of Stochastic Strategies in the Prisoner’s Dilemma. Acta Applic. Math., 1992. Vol. 20, 247–265 p.
197. *Olsder, G.J.*, Differential Game–theoretic Thoughts on Option Pricing and Transaction Costs // International game theory review, 2000. Vol. 2. No. 2. P. 209–228.
198. *Osipov, Yu.S., Kryazhimskii A.V.*, Inverse Problems of Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Amsterdam: Gordon and Breach, 1995. 625 P.

199. *Palokangas, T.*, Labour Unions, Public Policy and Economic Growth. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 238 P.
200. *Pashkov, A.G., Terekhov, S.D.*, A Differential Game of Approach with Two Pursuers and One Evader. Journal of Optimization Theory and Applications, 1987. Vol. 55. No. 2. P. 303–311.
201. *Petrosjan, L.A., Mazalov, V.V.* Handbook of Game Theory. — New York: Nova Science Pub Inc, — 2007.
202. *Petrosjan, L., Zaccour, G.*, Time-consistent Shapley Value Allocation of Pollution Cost Reduction // Journal of Economic Dynamics and Control, 2003. Vol. 27. P. 381–398.
203. *Rockafellar, R.T., Wets, R.J-B.*, Variational Analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 735 P.
204. *Roxin, E.O.*, Stability in General Control Systems. Journal of Differential Equations, 1965. Vol. 1, P. 115–150.
205. *Sanderson W.C., Tarasyev A.M., Usova A.A.*, Capital vs. Education: Assessment of Economic Growth from Two Perspectives // Proceedings of the 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, 2010. P. 1110–1115.
206. *Schelling, T.C.*, The Strategy of Conflict. Harvard University Press, 1980.
207. *Smale S.*, The Prisoner's Dilemma and Dynamical Systems Associated to Non-cooperative Games // Econometrica. 1980. Vol. 48, no. 7. P. 1617–1634.
208. *Souganidis, P.E.*, Approximation Schemes for Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations // J. Differen. Equat. 1985. Vol. 59. P. 1–43.
209. *Subbotin, A.I.*, Generalized Solutions for First-Order PDE, Birkhauser, Boston, Massachusetts, 1995.
210. *Subbotin, A.I., Tarasyev A.M., Ushakov V.N.*, Generalized Characteristics of Hamilton–Jacobi Equations // J. Comput. Systems Sci. Intern., 1994. Vol. 32. No. 2. P. 157–163.
211. *Tarasyev A.M.*, A Differential Model for a 2×2 Evolutionary Game Dynamics, IIASA Working Paper, Laxenburg, Austria, 1994, WP-94-63.

212. *Tarasyev A.M., Usova A.A.*, The Value Function as a Solution of Hamiltonian Systems in Linear Optimal Control Problems with Infinite Horizon // IFAC PapersOnLine, Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Milan, 2011. Vol. 18, Part 1. (Identifier: 10.3182/20110828-6-IT-1002.00835. Edited by S. Bittanti S., Cenedese A., Zampieri S.)
213. *Tarasyev A.M., Usova A.A.*, An Iterative Direct-Backward Procedure for Construction of Optimal Trajectories in Control Problems with Infinite Horizon // IFAC PapersOnLine, Proceedings of the 18th IFAC World Congress, Milan, 2011. Vol. 18, Part 1. (Identifier: 10.3182/20110828-6-IT-1002.01836. Edited by S. Bittanti, A. Cenedese, S. Zampieri)
214. *Tarasyev A.M., Uspenskii A.A., Ushakov V.N.*, Approximation Schemes for Constructing Minimax Solutions of Hamilton-Jacobi Equations // Izvestiya RAN.Technical Cybernetics, 1994. № 3. P. 173–185.
215. *Tarasyev, A.M., Watanabe, C.*, Dynamic Optimality Principles and Sensitivity Analysis in Models of Economic Growth // Nonlinear Analysis, 2001. Vol. 47, No. 4, P. 2309–2320.
216. *Tol R.*, The Benefits of Greenhouse Gas Emission Reduction: an Application of FUND // Working Paper FNU-64. Hamburg: Hamburg University, 2005. 33 p.
217. *Udwadia, F. E.*, Boundary Control, Quiet Boundaries, Super-stability and Super-instability // Applied Mathematics and Computation, 2005. Vol. 164, P. 327–349.
218. *Vasin V.V., Ageev A.L.*, Ill-posed Problems With a Priori Information. Utrecht: VSP, 1995. 255 p. (Inverse and Ill-Posed Probl. Ser.)
219. *Verkama, M., Ehtamo, H., Hamalainen, R.P.*, Distributed Computation of Pareto Solutions in N-player Games // Systems analysis laboratory Research report A53, Helsinki University of Technology, 1994.
220. *Vinter, R.*, Optimal Control. Boston: Birkhauser, 2000. 507 P.
221. *Wirl, F.*, The Economics of Conservation Programs. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1997.
222. *Zangwill W.I., Garcia C.B.*, Pathways to Solutions, Fixed points, and Equilibria. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1981. 07632.1981.