

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б.Н. ЕЛЬЦИНА»

На правах рукописи

КОШКИН ЕВГЕНИЙ ВЯЧЕСЛАВОВИЧ

**СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С
КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ АРГУМЕНТАМИ**

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИ С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук

Ю. Ф. Долгий

Екатеринбург — 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
ГЛАВА 1. СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ АРГУМЕНТАМИ	
1.1. Задача стабилизации линейных периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами	20
1.2. Численные методы решения дискретного уравнения Риккати	28
1.2.1. Метод Ньютона	28
1.2.2. Метод приведения к устойчивой форме Шура	34
1.3. Метод продолжения по параметру	39
1.4. Метод факторизации характеристического уравнения в случае скалярного управления	47
1.5. Стабилизация решений нелинейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами	51
1.6. Стабилизация положений равновесия популяционных моделей	56
ГЛАВА 2. СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ	
1. Линейная периодическая конечномерная система дифференциальных уравнений с последствием	65
2. Общее решение системы дифференциальных уравнений с последствием	68
3. Сведение к задаче оптимальной стабилизации дискретной системы	70
4. Расширение множества допустимых управлений	73
ГЛАВА 3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ	
1. Конечномерные аппроксимации периодических дифференциальных уравнений с последствием	77
2. Счетная система неоднородных дифференциальных уравнений в функциональном пространстве	82
3. Построение стабилизирующих управлений в случае аппроксимирующих операторов	86

4. Задача стабилизации скалярного периодического дифференциального уравнения с сосредоточенным запаздыванием	90
ГЛАВА 4. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС PCASTAB ДЛЯ WOLFRAM MATHEMATICA 8.0	
1. Назначение, базовые принципы организации работы и состав программного комплекса	93
2. Использование программного комплекса средствами интерфейса взаимодействия с пользователем	95
3. Использование программного комплекса средствами консоли пакета Wolfram Mathematica 8.0	105
Список литературы	112

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы и степень ее разработанности. Интерес к дифференциальным уравнениям с кусочно-постоянными аргументами обусловливается большим числом задач математического моделирования, возникающих в различных областях естествознания, а также при решении технических задач. Дифференциальные уравнения с кусочно-постоянными аргументами удобно использовать при математическом описании систем автоматического регулирования, которые содержат непрерывные подсистемы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, и импульсные подсистемы, описываемые разностными уравнениями [9, 10, 47, 54, 109]. Рассматриваемые уравнения используются при описании математических моделей популяционной динамики [12, 15, 19, 21, 22, 25, 28, 29, 32, 33]. Имеются математические модели, описывающие функционирование экономических систем [102, 103].

Изучаемые в настоящей работе уравнения принадлежат классу функционально-дифференциальных уравнений, основные положения теории которых изложены в монографиях Н.В. Азбелева, В.П. Максимова и Л.Ф. Рахматуллиной [36], Р. Беллмана и К.Л. Кука [45], В.Б. Колмановского и В.Р. Носова [72], Н.Н. Красовского [88] А.Д. Мышкиса [97], Дж. Хейла [108], Л.Э. Эльсгольца и С.Б. Норкина [113].

Развитию качественной теории дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами посвящены работы М.У. Акмет и С. Вüyükadli [2], А. Cabada и J.B. Ferreira [4], К.Л. Cooke, I. Györi, J. Turi, G. Turner, J. Wiener [5, 8–10, 16], G. Seifert [27], Wang Li, Yuan Rong и Zhang Chuan Yi [30], А. Alonso, J. Hong и J. Rojo [3], S. George [13], Y. Rong [26], M. Yoshiaki [33]. Задачи устойчивости решений дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами изучались в работах М.У. Акмет, D. Arugaslan, E. Yilmaz [1] К.Л. Cooke и J.M. Ferreira [6, 7], К. Golpalsamy и P. Liu [15, 22], R.M. May [25].

В работах Н.Н. Красовского, посвященных проблеме аналитического конструирования оптимальных регуляторов для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием, показано, что при ее решении удобно использовать функциональное пространство состояний [89–91]. Н.Н. Красовский определил достаточные условия существования оптимального стабилизирующего управления. Ю.С. Осипов установил их связь с вполне управляемостью специальной конечномерной системой [92, 98].

Задача нахождения оптимального стабилизирующего управления для общего класса систем дифференциальных уравнений с последствием и общего множества допустимых управлений является достаточно сложной [7, 42, 55, 89, 114]. Поэтому развивались приближенные методы решения этой задачи. В работах Дж. Хейла [108], С.Н. Шиманова [111, 112], Н.Н. Красовского [90], М.С. Delfour [11] предложены схемы аппроксимации

систем дифференциальных уравнений с последействием. Их приложению к задаче оптимальной стабилизации систем с запаздыванием посвящены работы Н.Н. Красовского, Ю.С. Осипова [90, 92, 98], Е.М. Маркушина, М.Н. Шабалина и С.Н. Шиманова [95, 96, 110], М.С. Delfour [11], J.S. Gibson [14].

В классе дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами проблема оптимальной стабилизации решений специально не изучалась.

Цели и задачи диссертационной работы. Цель работы состоит в решении задач оптимальной стабилизации для периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами и их конечномерных расширений, в использовании этих систем в качестве приближений при решении задачи оптимальной стабилизации для периодических линейных систем дифференциальных уравнений с последействием общего вида, а также в разработке конструктивных методов нахождения стабилизирующих управлений, алгоритмов и реализации их в форме компьютерных программ.

Научная новизна. Важным свойством систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами является конечномерность пространства их решений. Для сохранения этой конечномерности в данной работе рассматривается множество допустимых управлений, состоящее из кусочно-постоянных функций. Бесконечномерность пространства состояний создает большие трудности при решении задачи оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последействием. В то же время в классе дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами возможен прогресс в решении проблемы оптимальной стабилизации. Здесь можно успешно использовать общие подходы теории оптимальной стабилизации для обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с последействием и разностных уравнений с дискретным временем. В предлагаемой работе установлена связь задачи оптимальной стабилизации периодической системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами с задачей оптимальной стабилизации автономной системы разностных уравнений с дискретным временем. Этот результат справедлив для линейных и нелинейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами.

В настоящей работе предложено расширение класса периодических линейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами. В основу этого расширения положено представление конечномерного вольтеррового по Тихонову оператора. Этот оператор задает правую часть дифференциального уравнения, пространство решений которого конечномерно. Предложенные системы дифференциальных уравнений с последействием называются системами дифференциальных уравнений с конечномерными операторами. Впервые такие системы рассмотрены в работах Ю.Ф. Долгого и В.С. Тара-

сяна [62,104]. В предлагаемой работе установлена связь задачи оптимальной стабилизации таких систем с задачей оптимальной стабилизации автономных систем разностных уравнений с дискретным временем.

Системы дифференциальных уравнений с конечномерными операторами используются в данной работе при построении конечномерных аппроксимаций для периодических линейных систем дифференциальных уравнений с последствием общего вида. Предложено несколько схем аппроксимаций и обоснована сходимость порождаемых ими приближений. Для аппроксимируемых систем разработаны процедуры нахождения стабилизирующих управлений.

Предложенные в работе методы построения стабилизирующих управлений конструктивны, положены в основу вычислительных алгоритмов и реализованы в форме компьютерных программ в программном комплексе PCAStab для Wolfram Mathematica 8.

Теоретическая и практическая значимость работы. Системы дифференциальных уравнений с последствием играют важную роль при описании различных процессов и явлений в науке и технике. В работе получены результаты, имеющие теоретическую ценность для теории оптимальной стабилизации решений периодических систем дифференциальных уравнений с последствием. С другой стороны, полученные в работе результаты могут иметь и практическую ценность. Они могут быть использованы при стабилизации динамических процессов в популяционных и экономических системах, а также в системах автоматического регулирования.

Методология и методы исследования. В основе исследований лежат понятия и методы теории дифференциальных уравнений, разностных уравнений, теории оптимальной стабилизации, теории функций и функционального анализа, численных методов анализа.

Положения, выносимые на защиту. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

- обосновано сведение задач оптимальной стабилизации периодических систем с кусочно-постоянными аргументами и их расширений к задачам оптимальной стабилизации автономных систем разностных уравнений с дискретным временем;
- предложены и обоснованы конечномерные аппроксимации для периодической линейной системы дифференциальных уравнений с последствием общего вида;
- найдено общее представление конечномерного линейного вольтеррового по Тихонову оператора;
- предложены и обоснованы численные процедуры нахождения оптимального стабилизирующего управления;

- разработан комплекс программных средств для численного нахождения оптимального стабилизирующего управления, в котором реализованы предложенные в работе численные методы и алгоритмы, а также выполнена визуализация результатов расчетов, работа программного комплекса апробирована на популяционных моделях.

Достоверность результатов. Достоверность полученных в работе результатов подтверждается соответствующими математическими доказательствами, результатами компьютерного моделирования, использованием общепризнанных апробированных методов вычислений и согласованностью результатов, полученных различными способами.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Система нумерации формул содержит три индекса, первый индекс — номер главы, второй индекс — номер параграфа, третий индекс — номер формулы в параграфе. Параграфы нумеруются двумя индексами, первый индекс — номер главы, второй индекс — номер объекта в главе. Параграф 1.2 содержит два подраздела, нумеруемых тремя индексами, первые два индекса совпадают с индексами параграфа, третий индекс — номер подраздела. Общий объем работы составляет 120 страниц машинописного текста.

Краткое содержание работы. Перейдем к рассмотрению основных результатов, полученных в диссертации.

В **первой главе** исследуется задача построения стабилизирующих управлений для систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами. В параграфах §§1.1 — 1.4 рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{dx(t)}{dt} = A^o(t)x(t) + \sum_{k=0}^l A_k(t)x([t-k]) + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (0.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, $A^o : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, $k = 0, \dots, l$, — непрерывные 1-периодические функции, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times r}$ — непрерывная 1-периодическая функция, $[a]$ — целая часть числа a .

Множество допустимых управлений U задается кусочно-постоянными функциями $u(t) = u_n$, $n \leq t < n+1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, в которых значения управления формируются по принципу обратной связи.

Ставится задача нахождения управления u^0 в множестве допустимых управлений U , которое обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (0.1) и минимизирует следующий критерий качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T(t)D_x(t)x(t) + u^T(t)D_u(t)u(t)) dt. \quad (0.2)$$

Здесь $D_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ и $D_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times r}$ — непрерывные 1-периодические функции, значения $D_x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, являются неотрицательными матрицами, значения $D_u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — положительно определенными матрицами.

Теорема 0.1. Пусть A^o , A^k , $k = 0, \dots, l$, B — непрерывные 1-периодические функции. Задача оптимальной стабилизации в множестве допустимых управлений U для системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (0.1) и критерия качества процесса управления (0.2) эквивалентна задаче оптимальной стабилизации системы разностных уравнений

$$y_{n+1} = \mathcal{A}y_n + \mathcal{B}u_n, \quad (0.3)$$

где $y_n \in \mathbb{R}^{m(l+1)}$, \mathcal{A} , \mathcal{B} — постоянные матрицы размерностей $m(l+1) \times m(l+1)$ и $m(l+1) \times r$ соответственно, с дискретным критерием качества процесса управления

$$\mathcal{J} = \sum_{n=0}^{+\infty} (y_n^T \mathcal{D}_y y_n + y_n^T \mathcal{D}_{yu} u_n + u_n^T \mathcal{D}_{yu}^T y_n + u_n^T \mathcal{D}_u u_n), \quad (0.4)$$

где \mathcal{D}_y , \mathcal{D}_{yu} , \mathcal{D}_u — постоянные матрицы размерностей $m(l+1) \times m(l+1)$, $m(l+1) \times r$ и $r \times r$ соответственно. Здесь матричные коэффициенты \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{D}_y , \mathcal{D}_{yu} , \mathcal{D}_u аналитически определяются через матричные функции $A^o(t)$, $A_k(t)$, $k = 0, \dots, l$, $B(t)$, $D_x(t)$, $D_u(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Достаточные условия, обеспечивающие существование единственного решения задачи оптимальной стабилизации (0.3), (0.4) имеют вид

$$(A) \quad \begin{aligned} & \text{пара матриц } \tilde{\mathcal{A}} \text{ и } \mathcal{B} \text{ управляема,} \\ & \text{пара матриц } \tilde{\mathcal{D}}_1 \text{ и } \tilde{\mathcal{A}} \text{ идентифицируема.} \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{D}_{yu}^T$, $\tilde{\mathcal{D}}_y = \mathcal{D}_y - \mathcal{D}_{yu}\mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{D}_{yu}^T$, $\tilde{\mathcal{D}}_1$ — произвольная матрица, удовлетворяющая свойству $\tilde{\mathcal{D}}_1^T \tilde{\mathcal{D}}_1 = \tilde{\mathcal{D}}_y$.

Проблема решения задач оптимальной стабилизации (0.3), (0.4) при выполнении условий (A), связана с поиском положительно определенного решения нелинейного алгебраического уравнения Риккати

$$A^T P A - P + \mathcal{D}_y - (A^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_{yu}) [\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u]^{-1} (\mathcal{B}^T P A + \mathcal{D}_{yu}^T) = 0, \quad (0.5)$$

Теорема 0.2. Пусть выполнены условия теоремы 0.1 и условия (A). Тогда в множестве допустимых управлений U задача оптимальной стабилизации нулевого решения системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (0.1) и критерием качества (0.2) имеет единственное решение, определяемое формулой

$$u^0(t, x(\cdot)) = \sum_{j=0}^l K_j x([t - k]), \quad t \in \bar{\mathbb{R}}^+. \quad (0.6)$$

Здесь $K = \{K_j\}_{j=0}^l$, $K = -[\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u]^{-1} (\mathcal{B}^T P \mathcal{A} + \mathcal{D}_{yu}^T)$, P – положительно определенное решение уравнения (0.5).

Значение показателя качества (0.2) для решения системы (0.1), определяемого начальным вектором $y_0 = (x^T(0), x^T(-1), \dots, x^T(-l))^T$ и оптимальным стабилизирующим управлением (0.6), определяется формулой

$$J^0 = y_0^T P y_0.$$

§§ 1.2 – 1.4 посвящены развитию методов поиска стабилизирующих управлений в задаче (0.1), (0.2).

В разделе 1.2.1 параграфа 1.2 предложена процедура численного решения уравнения Риккати (0.5), использующая универсальный метод Ньютона. При решении задачи оптимальной стабилизации (0.1), (0.2) метод Ньютона модифицируется путем учета структуры матричных коэффициентов эквивалентной задачи (0.3), (0.4), что позволяет существенно понизить порядок нелинейной алгебраической системы, определяющей решение уравнения Риккати.

В разделе 1.2.2 параграфа 1.2 рассмотрен численный метод решения дискретного уравнения Риккати (0.5), основанный на процедуре QR-разложения матрицы [20, 68]

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}} + \mathcal{F} \tilde{\mathcal{A}}^{-T} \tilde{\mathcal{D}}_y & -\mathcal{F} \tilde{\mathcal{A}}^{-T} \\ -\tilde{\mathcal{A}}^{-T} \tilde{\mathcal{D}}_y & \tilde{\mathcal{A}}^{-T} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{F} = \mathcal{B} \mathcal{D}_u^{-1} \mathcal{B}^T$. Применением QR-разложения [46] матрица \mathcal{M} приводится к верхней форме Шура R . Переупорядочением формы Шура R необходимо перейти к другой форме \tilde{R} , содержащей в верхних $m(l+1)$ позициях главной диагонали устойчивые собственные значения. Пусть Q – унитарная матрица, трансформирующая \mathcal{M} к форме R , а V – произведение унитарных преобразований, использованных при переупорядочении. Пусть матрица $U = QV$ имеет блочную структуру

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix},$$

каждый блок которой имеет размерность $m(l+1) \times m(l+1)$. Тогда искомая матрица P – решение дискретного уравнения Риккати определяется формулой

$$P = U_{21} U_{11}^{-1}.$$

В §1.3 рассматривается метод продолжения по параметру [89] для решения задачи оптимальной стабилизации (0.1), (0.2). Следуя данному методу, для задачи (0.3), (0.4)

ставится вспомогательная задача оптимальной стабилизации разностного уравнения

$$y_{n+1} = \left(\mu \tilde{\mathcal{A}} + (1 - \mu) I_{m(l+1)} \right) y_n + \mu \mathcal{B} \tilde{u}_n + (1 - \mu) v_n, \quad (0.7)$$

с критерием качества

$$J_\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1 - \mu) (y_n^T y_n + v_n^T v_n) + \mu \left(y_n^T \tilde{\mathcal{D}}_y y_n + \tilde{u}_n^T \mathcal{D}_u \tilde{u}_n \right) \right), \quad n \geq 0, \quad \mu \in [0, 1]. \quad (0.8)$$

Здесь $v_n \in \mathbb{R}^{m(l+1)}$ — вспомогательное управление.

Решение вспомогательной задачи осуществляется вторым методом Ляпунова [93]. Функция Ляпунова выбирается в виде $V(y_n, \mu) = y_n^T P(\mu) y_n$, $n \geq 0$, $P(\mu) = P^T(\mu) > 0$, $\mu \in [0, 1]$. Применение второго метода Ляпунова позволяет свести вспомогательную задачу оптимальной стабилизации (0.7), (0.8) к решению уравнения

$$\begin{aligned} F(\mu, P(\mu)) &= \hat{A}^T(\mu) P(\mu) \hat{A}(\mu) - P(\mu) + \hat{D}_y(\mu) - \\ &- \hat{A}^T(\mu) P(\mu) \hat{B}(\mu) \left(P(\mu) \hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(\mu) \hat{A}(\mu) = 0. \end{aligned} \quad (0.9)$$

в котором $\hat{A}(\mu) = \mu \tilde{\mathcal{A}} + (1 - \mu) I_{m(l+1)}$, $\hat{B}(\mu) = \mu \tilde{\mathcal{B}} + (1 - \mu) I_{m(l+1)}$, где $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \mathcal{D}_u^{-1} \mathcal{B}^T$, $\hat{D}_y(\mu) = \mu \tilde{\mathcal{D}}_y + (1 - \mu) I_{m(l+1)}$.

Теорема 0.3. *Оптимальное управление вспомогательной задачи (0.7), (0.8) при $\mu \in (0, 1]$ определяется формулой*

$$\tilde{u}_n^0(\mu, y_n) = -\mathcal{D}_u^{-1} \mathcal{B}^T K(\mu) y_n, \quad n \geq 0,$$

где $K(\mu) = \left(P(\mu) \hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(\mu) \hat{A}(\mu)$, матрица $P(\mu)$, $\mu \in (0, 1]$, удовлетворяет матричному уравнению (0.9). При этом оптимальному управлению в задаче (0.3), (0.4) будет соответствовать управление $u_n^0(y_n) = \tilde{u}_n^0(1, y_n) - D_u^{-1} D_{yu}^T y_n$.

Для решения уравнения (0.9) предлагается использовать подход, изложенный в работе [50], в соответствии с которым уравнение (0.9) на интервале $(0, 1)$ заменяется задачей Коши для дифференциального уравнения с начальным условием $P(0) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} I_{m(l+1)}$. Обыкновенное дифференциальное уравнение в задаче Коши, описывается формулой

$$F'_\mu(\mu, P(\mu)) + F'_P(\mu, P(\mu)) (P'(\mu)) = 0,$$

где $F'_\mu(\mu, P(\mu))$ — производная матричной функции F по параметру μ при фиксированном значении P , $F'_P(\mu, P(\mu)) (X)$ — значение производной Фреше по матричному элементу P на матричном элементе X . Решение задачи Коши предлагается осуществлять численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка на некотором равномерном разбиении отрезка $[0, 1]$.

Процедуру нахождения стабилизирующего управления можно упростить, если заменить задачу нахождения матрицы $P(\mu)$, $\mu \in [0, 1]$, задачей нахождения матрицы $K(\mu)$, $\mu \in [0, 1]$.

В §1.4 для случая скалярного управления u предлагается процедура построения оптимального управления методом факторизации характеристического уравнения [71, 94].

В §1.5 рассмотрена задача оптимальной стабилизации решений нелинейной системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), x([t]), x([t-1]), \dots, x([t-l]), u) \quad (0.10)$$

с критерием качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} \omega(t, x(t), u(t)) dt. \quad (0.11)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, множество допустимых управлений, формируемых по принципу обратной связи, U по-прежнему состоит из кусочно-постоянных функций и выполнены условия

- F — непрерывная вектор-функция в некоторой области $\mathbb{R} \times D$;
- (B) голоморфная по всем аргументам, кроме первого, в области D ;
- периодическая по первому аргументу, с периодом 1; $F(t, 0, \dots, 0) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.
- ω — неотрицательная функция, непрерывная в некоторой области $\mathbb{R} \times D'$;
- (C) положительно определенная, голоморфная по x и u в области D' ;
- периодическая по первому аргументу, с периодом 1; $\omega(t, 0, 0) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

где D и D' — области пространств $\mathbb{R}^{m(l+1)+r}$ и \mathbb{R}^{m+r} , соответственно, содержащие точки с нулевыми координатами.

Теорема 0.4. Пусть выполнены условия (B) и (C). Тогда задача оптимальной стабилизации в множестве допустимых управлений U системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (0.10) и с критерием качества процесса управления (0.10) эквивалентна задаче оптимальной стабилизации системы дискретных уравнений

$$y_{n+1} = f(y_n, u_n), \quad (0.12)$$

с критерием качества процесса управления

$$\tilde{J} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{\omega}(y_n, u_n). \quad (0.13)$$

Здесь $y_n \in \mathbb{R}^{m(l+1)}$, $n \geq 0$, вектор-функция f и скалярная функция $\tilde{\omega}$ аналитически определяются через вектор-функцию F и скалярную функцию ω .

Теорема 0.5. Пусть выполнены условия (A), (B), (C). Тогда в множестве допустимых управлений U задача оптимальной стабилизации нулевого решения системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (0.10) и критерием качества (0.11) определяется асимптотической формулой

$$u^0(t, x(\cdot)) = \sum_{k=1}^N u^k(x([t]), \dots, x([t-l])) + O\left(\left(\sum_{k=0}^l |x([t-k])|\right)^{\frac{N+1}{2}}\right), \quad t \geq 0.$$

Здесь функция u^1 является решением линеаризованной задачи оптимальной стабилизации, совпадающей по форме с задачей (0.3), (0.4), и определяется формулой

$$u^1(y) = K^1 y, \quad K^1 = -[\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u]^{-1}(\mathcal{B}^T P \mathcal{A} + \mathcal{D}_{yu}^T),$$

где \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{D}_{yu} , \mathcal{D}_u — известные матрицы, положительно определенная симметричная матрица P удовлетворяет уравнению (0.5). Функции u^{k+1} , $1 < k \leq N-1$, определяются формулами

$$u^{k+1}(y) = \frac{1}{2} (\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u)^{-1} \left[M^{k+1T}(y) - \mathcal{B}^T V_z^{k+2T}((\mathcal{A} + \mathcal{B}K^1)y) \right], \quad 1 \leq k \leq N-1,$$

в которых $M^{k+1}(y)$, $V^{k+2}(z)$, $1 \leq k \leq N-1$, — вычисляемые вектор-функции.

В § 1.6 построены асимптотические управления в задаче стабилизации численности популяции вокруг ее среднего размера (емкости среды обитания) K путем регулирования численности популяции

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{x([t])}{K} \right) x(t) - Ku,$$

а также путем регулирования скорости роста популяции

$$\frac{dx}{dt} = (r + u) \left(1 - \frac{x([t])}{K} \right) x(t).$$

Вопросы, связанные с оптимальным регулированием численности популяции в модели Хатчинсона с распределенным запаздыванием, рассматривались ранее в работе С.А. Кащенко [70].

Построено асимптотическое управление в задаче стабилизации численности популяции, описываемой модифицированной моделью популяционной динамики типа «хищник-жертва»

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= r_1 \left(1 - \frac{x_2([t])}{K_2} \right) x_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -r_2 \left(1 - \frac{x_1([t])}{K_1} \right) x_2(t) + u. \end{aligned}$$

Здесь x_1 отражает численность популяции «жертв», x_2 — численность популяции «хищников», r_1, r_2 — значения, характеризующие скорости воспроизведения, а K_1, K_2 — равновесные численности «жертв» и «хищников», соответственно, u отражает антропогенную деятельность, направленную на регулирование численности «хищников».

Во **второй главе** исследуется задача построения оптимальных стабилизирующих управлений для линейных периодических систем дифференциальных уравнений с последствием и конечномерным вольтерровым по Тихонову оператором.

В §2.1 описывается математическая модель линейных периодических конечномерных систем дифференциальных уравнений с последствием

$$\frac{dx(t)}{dt} = (Fx)(t) + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (0.14)$$

в которой оператор $F : C([- \tau, +\infty), \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1^{loc}((0, +\infty), \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет свойству $(Fx(\omega + \cdot))(t) = (Fx(\cdot))(\omega + t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, а его значения на $(0, \omega]$ совпадают со значениями линейного конечномерного вольтеррового по Тихонову оператора $\hat{F} : C([- \tau, \omega), \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1((0, \omega], \mathbb{R}^m)$, $u \in \mathbb{R}^r$, B — ω -периодическая матричная функция интегрируемая на $(0, \omega]$.

Критерий качества переходных процессов задан в виде

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T(t)C_1(t)x(t) + u^T(t)C_2(t)u(t)) dt, \quad (0.15)$$

где C_1, C_2 — ω -периодические матричные функции, значения которых являются симметрическими положительно определенными матрицами.

Доказано, что вольтерровый по Тихонову конечномерный оператор \hat{F} допускает представление

$$(\hat{F}x)(t) = \sum_{i=1}^K a_i(t) \int_{-\tau}^{\omega} d\mu_i^T(s)x(s), \quad t \in (0, \omega], \quad (0.16)$$

где $a_i \in L_1((0, \omega], \mathbb{R}^m)$, $\text{supp } a_i \in (t_i^-, t_i^+]$, $\mu_i : [- \tau, \omega] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — функции с ограниченной вариацией, $\mu_i(s) = 0$ при $t_i^- < s \leq \omega$ и $\mu_i(s) = \mu_i(t_i^+ - \tau)$, при $-\tau \leq s \leq t_i^+ - \tau$ для некоторых чисел $0 \leq t_i^- < t_i^+ \leq \omega$, $t_i^+ - \tau \leq t_i^-$, $1 \leq i \leq I$.

В §2.2 получено общее решение $x(t, \varphi)$ неоднородной линейной периодической системы уравнений с последствием и конечномерным вольтерровым по Тихонову оператором, допускающим представление (0.16).

В §2.3 рассмотрена задача оптимальной стабилизации решений линейных периодических систем дифференциальных уравнений с последствием и конечномерным вольтерровым по Тихонову оператором (0.14) с критерием качества (0.15), обобщающая задачу оптимальной стабилизации решений линейных периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (0.1) с критерием качества (0.2).

Учитывая специальную форму представления периодического конечномерного вольтеррового оператора в (0.14), множество допустимых управлений U^0 моделируется функциями $u = u(t, x_t(\cdot)) = \hat{u}(x_{n\omega}(\cdot))$, $n\omega < t \leq (n+1)\omega$, $n \geq 0$, определяемыми непрерывными отображениями $\hat{u}(\cdot) : C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^r$.

Теорема 0.6. Пусть линейный конечномерный вольтерровый по Тихонову оператор $\hat{F} : C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1((0, \omega], \mathbb{R}^m)$ допускает представление (0.16). Тогда задача оптимальной стабилизации в множестве допустимых управлений U^0 системы дифференциальных уравнений с последствием (0.14) и с критерием качества процесса управления (0.15) эквивалентна задаче оптимальной стабилизации системы разностных уравнений

$$y_n = \mathcal{A}y_{n-1} + \mathcal{B}u_n, \quad n \geq 0, \quad (0.17)$$

с дискретным критерием качества

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} (y_{n-1}^T \mathcal{J}_1 y_{n-1} + y_{n-1}^T \mathcal{J}_2 u_n + u_n^T \mathcal{J}_2^T y_{n-1} + u_n^T \mathcal{J}_3 u_n). \quad (0.18)$$

Коэффициенты \mathcal{A} , \mathcal{J}_1 размерности $(m + \dim \mathcal{K}^-) \times (m + \dim \mathcal{K}^-)$, \mathcal{B} , \mathcal{J}_2 размерности $(m + \dim \mathcal{K}^-) \times r$, \mathcal{J}_3 размерности $r \times r$ аналитически определяются через коэффициенты представления вольтеррового конечномерного оператора (0.16) и коэффициенты задачи (0.14), (0.15). Здесь $\mathcal{K}^- = \{k : t_k^+ \leq \tau, k = 1, \dots, K\}$.

Теорема 0.7. Пусть для дискретной задачи оптимальной стабилизации (0.17), (0.18) существует оптимальное стабилизирующее управление $u_n^0 = \tilde{u}^0(y_{n-1}^1, y_{(m+1)(n-1)}, \dots, y_{(m+\dim \mathcal{K}^-)(n-1)})$, $n \geq 0$. Тогда оптимальное стабилизирующее управление непрерывной задачи оптимальной стабилизации (0.14), (0.15) с множеством допустимых управлений U^0 определяется формулами

$$u^0 = \hat{u}^0(x_{n\omega}(\cdot)) = \tilde{u}^0 \left(x(n\omega), \int_{t_{j_1}^+ - \tau}^0 d\mu_{j_1}^T(s) x(n\omega + s), \dots, \int_{t_{j_{\dim \mathcal{K}^-}}^+ - \tau}^0 d\mu_{j_{\dim \mathcal{K}^-}}^T(s) x(n\omega + s) \right),$$

где $n\omega < t \leq (n+1)\omega$, $n \geq 0$, дискретная функция $i \rightarrow j_i$ задает взаимно однозначное отображение упорядоченного множества чисел $\{m+1, \dots, m + \dim \mathcal{K}^-\}$ на множество \mathcal{K}^- .

В §2.4 расширено множество допустимых управлений. Для заданного разбиения полуинтервала $(0, \omega]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = \omega$ множество допустимых управлений U^1 моделируется функциями $u = u(t + \omega, x_t(\cdot)) = u(t, x_t(\cdot))$, $t \in \mathbb{R}^+$, $u = \sum_{j=1}^p \chi_{(t_{j-1}, t_j]}(t - n\omega) u_{jn}(x_{n\omega}(\cdot))$, $n\omega < t \leq (n+1)\omega$, $n \geq 0$, определяемыми непрерывными отображениями $u_{jn}(\cdot) : C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^r$, $1 \leq j \leq p$, $n \geq 0$.

Коэффициенты \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{J}_1 , \mathcal{J}_2 , \mathcal{J}_3 системы разностных уравнений (0.17) и критерия качества (0.18) в этом случае аналитически определяются через коэффициенты представления вольтеррового конечномерного оператора (0.16), коэффициенты задачи (0.14), (0.15) и точки выбранного разбиения полуинтервала $(0, \omega]$ в множестве допустимых управлений U^1 ; размерности матричных коэффициентов \mathcal{B} , \mathcal{J}_2 повышаются до $(m + \dim \mathcal{K}^-) \times rp$, коэффициента \mathcal{J}_3 — до $rp \times rp$.

Теорема 0.8. Пусть для дискретной задачи оптимальной стабилизации (0.17), (0.18) существует оптимальное стабилизирующее управление $u_{qn}^0 = \tilde{u}_q^0(y_{n-1}^1, y_{(m+1)(n-1)}, \dots, y_{(m+\dim \mathcal{K}^-)(n-1)})$, $1 \leq q \leq p$, $n \geq 0$. Тогда оптимальное стабилизирующее управление непрерывной задачи оптимальной стабилизации (0.14), (0.15) с множеством допустимых управлений U^1 определяется формулами

$$u^0 = \sum_{q=1}^p \chi_{(t_{q-1}, t_q]}(t - n\omega) \tilde{u}_q^0 \left(x(n\omega), \int_{t_{j_1}^+ - \tau}^0 d\mu_{j_1}^T(s) x(n\omega + s), \dots, \int_{t_{j_{\dim \mathcal{K}^-}}^+ - \tau}^0 d\mu_{j_{\dim \mathcal{K}^-}}^T(s) x(n\omega + s) \right), \quad n\omega < t \leq (n+1)\omega, \quad n \geq 0.$$

Линейные периодические конечномерные системы дифференциальных уравнений с последствием удобно использовать в качестве аппроксимационных моделей для общих линейных периодических систем с последствием и находить для последних приближения оптимальных стабилизирующих управлений. Глава 3 посвящена вопросу использования конечномерных аппроксимаций в задаче оптимальной стабилизации периодических систем с последствием, отличных от канонических [92, 110].

В § 3.1 предлагается математическая модель линейных конечномерных аппроксимирующих систем дифференциальных уравнений с последствием, рассматриваются различные ее реализации.

Объект управления определяется системой функционально-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = (Fx)(t) + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (0.19)$$

в которой $x : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, линейный вольтерровый по Тихонову оператор $F : C([-\tau, +\infty), \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1^{loc}((0, +\infty), \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет свойству $(Fx(\omega + \cdot))(t) = (Fx(\cdot))(\omega + t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $u \in \mathbb{R}^r$, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times r}$ — ω -периодическая матричная функция интегрируемая на $(0, \omega]$.

Для разбиения $\Delta_I : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_I = \omega$ полуинтервала $(0, \omega]$ с дополнительными условиями $0 < t_i - t_{i-1} \leq \tau$, $1 \leq i \leq I$, определим аппроксимирующую систему для системы (0.19) в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = (\hat{F}_I x)(t) + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (0.20)$$

в которой оператор $\hat{F}_I: C([- \tau, +\infty), \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1^{loc}((0, +\infty), \mathbb{R}^m)$ является линейным конечномерным вольтерровым по Тихонову оператором. Класс периодических конечномерных вольтерровых операторов $\hat{F}_I: C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1((0, \omega], \mathbb{R}^m)$ на полуинтервале $(0, \omega]$ определяется с помощью формул

$$(\hat{F}_I x)(t) = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{K_i} A_{ik}(t) \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \int_{t_i-\tau}^{t_{i-1}} d\hat{\eta}_{ik}(s) x(s), \quad t \in (0, \omega]. \quad (0.21)$$

Здесь K_i — натуральные числа; A_{ik} — ω -периодические матричнозначные функции интегрируемые по Лебегу на $(0, \omega]$; $\chi_E(\cdot)$ — индикатор множества E ; $\hat{\eta}_{ik}$ — матричнозначные функции, элементы которых имеют ограниченные вариации на $[-\tau, \omega]$, $\hat{\eta}_{ik}(s) = 0$ при $s \in (t_{i-1}, \omega]$, $\hat{\eta}_{ik}(s) = \hat{\eta}_{ik}(t_i - \tau)$ при $s \in [-\tau, t_i - \tau]$, $1 \leq k \leq K_i$, $1 \leq i \leq I$; при каждом i , $1 \leq i \leq I$, набор функций A_{ik} и $\hat{\eta}_{ik}$, $1 \leq k \leq K_i$, выбран линейно независимым.

С учетом специальной формы представления оператора \hat{F}_I множество допустимых управления U моделируется периодическими кусочно-постоянными векторными функциями

$$u = \sum_{i=1}^{I'} \chi_{(t'_{i-1}, t'_i]}(t - n\omega) \hat{u}_{ni}(x_{n\omega}(\cdot)), \quad n\omega < t \leq (n+1)\omega, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad (0.22)$$

определяемыми непрерывными отображениями $\hat{u}_{in}(\cdot): C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^r$, $1 \leq i \leq I'$. Здесь используется разбиение $\Delta_{I'}: 0 = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_{I'} = \omega$ полуинтервала $(0, \omega]$.

Определение. Класс операторов (0.21) называется аппроксимирующим для оператора F уравнения (0.19), если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся разбиение Δ_I и натуральные числа K_i , $1 \leq i \leq I$, такие, что $\|\hat{F}x - \hat{F}_I x\|_{L_1} < \varepsilon$ для каждой функции $x \in C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m)$.

Для дискретной реализации класса (0.21)

$$(\hat{F}_I^d x)(t) = \sum_{i=1}^I \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \sum_{j=-M+1}^i \int_{\mathcal{A}_j} d\eta(t, z-t) x(t_{j-1}), \quad t \in (0, \omega], \quad (0.23)$$

где $t_{j-I} = t_j - \omega$, $j = 1 \dots I-1$, t_{-M} — точка, ближайшая к точке $t = -\tau$ и расположенная справа от нее, $\mathcal{A}_j = (t_{j-1}, t_j] \cap (t - \tau, t]$, $j = -M+1, \dots, i$, $i = 1, \dots, I$, $t \in (0, \omega]$, справедлив следующий результат

Теорема 0.9. Пусть $\eta(t, z-t) = 0$, при $t \leq z \leq \omega$, $\eta(t, z-t) = \eta(t, -\tau)$, при $-\tau \leq z \leq t - \tau$, $0 < t \leq \omega$, элементы η_{pq} , $1 \leq p, q \leq m$, матричнозначной функции η — ω -периодические функции по первому аргументу, при каждом фиксированном значении второго аргумента $z - t \in [-\tau, 0]$ интегрируемы по Лебегу на $(0, \omega]$, а при почти каждом фиксированном значении первого аргумента $t \in (0, \omega]$ имеют ограниченные вариации $\text{var}_{[-\tau, 0]} \eta_{pq}(t, \cdot)$, $1 \leq p, q \leq m$, интегрируемые по Лебегу на $(0, \omega]$, $\eta(t, 0) = 0$, $t \in (0, \omega]$. Тогда класс

дискретных операторов (0.23) является аппроксимирующим для оператора F уравнения (0.19). Если при $I \rightarrow +\infty$ диаметр разбиения δ_I полуинтервала $(0, \omega]$ стремится к нулю, то последовательность операторов $\{\hat{F}_I^d\}_1^{+\infty}$, определяемая формулами (0.23), сильно сходится к оператору F на полуинтервале $(0, \omega]$.

Для усредняющей реализации класса (0.21)

$$(\hat{F}_I^s x)(t) = \sum_{i=1}^I \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \sum_{j=-M+1}^i \int_{\mathcal{A}_j} d\eta(t, z-t) \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(s) ds, \quad t \in (0, \omega] \quad (0.24)$$

справедлив следующий результат

Теорема 0.10. Пусть выполнены условия теоремы 0.9, а также $\int_0^\omega \text{var}_{s \in [-\delta, 0]} \eta_{p,q}(t, s) dt \rightarrow 0$, $1 \leq p, q \leq m$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда класс дискретных операторов (0.24) является аппроксимирующим для оператора F уравнения (0.19). Если при $I \rightarrow +\infty$ имеем $\delta_I \rightarrow 0$, то последовательность операторов $\{\hat{F}_I^s\}_1^{+\infty}$, определяемая формулами (0.24) сильно сходится к оператору F на полуинтервале $(0, \omega]$.

Для реализации класса (0.21) с помощью абстрактных рядов Фурье

$$\left(\hat{F}_I^f x\right)(t) = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{K_i} \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \psi_{ik}(t) \int_{t_i - \tau}^{t_{i-1}} d\tilde{\eta}_{ik}(s) x(s), \quad t \in (0, \omega]. \quad (0.25)$$

где $\{\psi_{ik}(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty}$ — ортонормированные функции, образующие ортонормированные системы функций в пространствах $L_2((t_{i-1}, t_i], \mathbb{R}^m)$, $\tilde{\eta}_{ik}(s) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_{ik}^T(z) \eta(z, s-z) dz$, $s \in [t_i - \tau, t_{i-1}]$, $1 \leq k \leq K_i$, $1 \leq i \leq I$, $\text{var}_{z \in [-\tau, 0]} \eta_{pq}(\cdot, z) \in L_2(0, \omega]$, $1 \leq p, q \leq m$, справедлив следующий результат

Теорема 0.11. Пусть выполнены условия теоремы 0.9, а также

$$1) \quad \text{var}_{z \in [-\tau, 0]} \eta_{pq}(\cdot, z) \in L_2(0, \omega], \quad 1 \leq p, q \leq m,$$

$$2) \quad \int_0^\omega \left(\text{var}_{z \in (-\delta, 0]} \eta_{pq}(t, z) \right)^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \int_0^\omega \left(\text{var}_{z \in [-\tau, -\tau+\delta]} \eta_{pq}(t, z) \right)^2 dt \rightarrow 0,$$

$1 \leq p \leq q \leq m$, при $\delta \rightarrow 0$. Тогда класс операторов (0.25), определяемых с помощью абстрактных рядов Фурье, является аппроксимирующим для оператора F уравнения (0.19). Если при $I \rightarrow +\infty$ имеем $\delta_I \rightarrow 0$ и $K_i \rightarrow +\infty$, $1 \leq i \leq I$, то последовательность операторов $\{\hat{F}_I^f\}_1^{+\infty}$ сильно сходится к оператору F на полуинтервале $(0, \omega]$.

В § 3.2 получено общее представление неоднородной линейной периодической системы уравнений с последствием и конечномерным вольтерровым по Тихонову оператором, допускающим представление (0.21).

В § 3.3 рассмотрена задача оптимальной стабилизации решений линейных периодических систем дифференциальных уравнений с последствием и конечномерным вольтерровым по Тихонову оператором (0.19) с критерием качества (0.15) с помощью аппроксимирующих систем (0.20).

Теорема 0.12. Пусть аппроксимирующий оператор $\hat{F}_I : C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1((0, \omega], \mathbb{R}^m)$ допускает представление (0.21). Тогда задача оптимальной стабилизации в множестве допустимых управлений U аппроксимирующей системы дифференциальных уравнений с последствием (0.20) и с критерием качества процесса управления (0.15) эквивалентна задаче оптимальной стабилизации системы разностных уравнений

$$y_n = \mathcal{A}y_{n-1} + \mathcal{B}\hat{u}_n, \quad n \geq 0, \quad \hat{u}_n = (\hat{u}_{n1}^T, \dots, \hat{u}_{nI}^T)^T, \quad (0.26)$$

с дискретным критерием качества

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} (y_{n-1}^T \mathcal{J}_1 y_{n-1} + y_{n-1}^T \mathcal{J}_2 \hat{u}_n + \hat{u}_n^T \mathcal{J}_2^T y_{n-1} + \hat{u}_n^T \mathcal{J}_3 \hat{u}_n). \quad (0.27)$$

Здесь матричные коэффициенты \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{J}_1 , \mathcal{J}_2 , \mathcal{J}_3 — аналитически определяются матричными функциями $A_{ik}(t)$, $\hat{\eta}_{ik}$, $1 \leq k \leq K_i$, $1 \leq i \leq I$, $B(t)$, $C_1(t)$, $C_2(t)$, $t \in (0, \omega]$ и выбранным разбиением Δ_I .

Теорема 0.13. Пусть операторы \hat{F}_I сильно сходятся к непрерывному оператору $\hat{F} : C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_2((0, \omega], \mathbb{R}^m)$ и для дискретной задачи оптимальной стабилизации (0.26), (0.27) при достаточно большом I существуют оптимальные стабилизирующие управление, принадлежащие классу допустимых функций (0.22). Тогда существует I такое, что стабилизирующие управления для системы (0.19) определяются формулами

$$u(t, x_{n\omega}()) = \sum_{i=1}^{I'} \chi_{(t'_{i-1}, t'_i]}(t - n\omega) \hat{u}_{ni}^0 \left(x(n\omega), \int_{t_{i_{m+1}}^{-\tau}}^0 d\eta_{i_{m+1}k_{m+1}}(s) x(n\omega + s), \dots, \int_{t_{i_M}^{-\tau}}^0 d\eta_{i_M k_M}(s) x(n\omega + s) \right), \quad n\omega < t \leq (n+1)\omega, \quad n \geq 0.$$

Разработанные методы и алгоритмы, теоретическое обоснование которых приведено в главах 1–3, составляют основу программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8. Глава 4 посвящена вопросам использования программного комплекса для решения задач оптимальной стабилизации решений линейных и нелинейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами и систем линейных периодических функционально-дифференциальных уравнений с конечномерными вольтерровыми операторами. Рассмотрены базовые принципы организации работы программного комплекса, его состав (§4.1) и различные способы его использования при решении практических задач (§§4.2, 4.3).

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на следующих научных мероприятиях:

1. 38, 39, 40, 41, 42-й региональных молодежных конференциях “Проблемы теоретической и прикладной математики” (Екатеринбург, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011 гг.);
2. XI Международной конференции “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” (Конференции Пятницкого) (Москва, 2010 г.);
3. II Международной школе-семинаре “Нелинейный анализ и экстремальные задачи” (Иркутск, 2010 г.);
4. Международная конференция по математической теории управления и механике (Суздаль, 2011 г.);
5. X Международная Четаевская конференция “Аналитическая механика, устойчивость и управление” (Казань, 2012 г.);
6. II Международный семинар, посвященный 70-летию со дня рождения академика А.И. Субботина, “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби” (Екатеринбург, 2015 г.).

Программа для ЭВМ. В рамках диссертации разработана программа для ЭВМ PCAStab для Wolfram Mathematica 8. Программа прошла процедуру государственной регистрации [83].

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [57–60, 73–82, 84–86]. Работы [57, 59, 74–76] опубликованы в журналах, входящих в перечень рецензируемых ВАК. В совместных работах [57–60, 86] научному руководителю принадлежат постановка задачи и общие методики исследования, а диссертанту — доказательства основных теорем, разработка численных методов, алгоритмов и соответствующих программных средств.

ГЛАВА 1. СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМИ АРГУМЕНТАМИ

§1.1. Задача стабилизации линейных периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{dx(t)}{dt} = A^o(t)x(t) + \sum_{k=0}^l A_k(t)x([t - k]) + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.1.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, $A^o : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, $A_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$, $k = 0, \dots, l$, — непрерывные 1-периодические функции, $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times r}$ — непрерывная 1-периодическая функция, $[a]$ — целая часть числа a .

Ставится задача в множестве допустимых управлений, формируемых по принципу обратной связи, найти управление u^0 , которое обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1.1.1) и минимизирует следующий критерий качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T(t)D_x(t)x(t) + u^T(t)D_u(t)u(t)) dt. \quad (1.1.2)$$

Здесь $D_x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ и $D_u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{m \times r}$ — непрерывные 1-периодические функции, значения $D_x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, являются неотрицательными матрицами, значения $D_u(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, — положительно определенными матрицами.

Учитывая специальную форму систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами допустимые управления будем выбирать в множестве U кусочно-постоянных функций $u(t) = u_n$, $n \leq t < n + 1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Здесь значения управления формируются по принципу обратной связи.

Для допустимого управления на полуинтервале $0 \leq n \leq t < n + 1$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $u(t) = u(n)$ и система дифференциальных уравнений (1.1.1) преобразуется к виду

$$\frac{dx(t)}{dt} = A^o(t)x(t) + \sum_{k=0}^l A_k(t)x(n - k) + B(t)u(n), \quad n \geq 0.$$

Используя это уравнение, находим представления решений системы (1.1.1) на положи-

тельной полуоси

$$x(t) = X(t)X^{-1}(n)x(n) + X(t) \int_n^t X^{-1}(\tau) \left(\sum_{k=0}^l A_k(\tau)x(n-k) + B(\tau)u(n) \right) d\tau, \quad n \leq t < n+1, \quad (1.1.3)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Здесь X ($X(0) = I_m$) — нормированная фундаментальная матрица системы обыкновенных дифференциальных уравнений $dx(t)/dt = A^o(t)x(t)$. Для непрерывности этих решений требуется их непрерывная стыковка при целых положительных значениях аргумента t . Условия этой стыковки определяют разностное уравнение

$$x(n+1) = X(n+1)X^{-1}(n)x(n) + X(n+1) \int_n^{n+1} X^{-1}(\tau) \left(\sum_{k=0}^l A_k(\tau)x(n-k) + B(\tau)u(n) \right) d\tau, \quad n \geq 0. \quad (1.1.4)$$

Каждое решение дискретной системы (1.1.4), с помощью формулы (1.1.3), задает непрерывное решение системы (1.1.1) на положительной полуоси. Используя свойство фундаментальной матрицы $X(t+\omega) = X(t)X(\omega)$, $t \in \mathbb{R}$, уравнение (1.1.4) преобразуем к виду

$$x(n+1) = \sum_{k=0}^l \mathcal{A}_k x(n-k) + \mathcal{B}_0 u(n), \quad (1.1.5)$$

где матричные коэффициенты \mathcal{A}_k , $k = 0, \dots, l$, и \mathcal{B}_0 определяются формулами

$$\mathcal{A}_0 = X(1) + X(1) \int_0^1 X^{-1}(\tau) A_0(\tau) d\tau, \quad (1.1.6)$$

$$\mathcal{A}_k = X(1) \int_0^1 X^{-1}(\tau) A_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, \dots, l, \quad (1.1.7)$$

$$\mathcal{B}_0 = X(1) \int_0^1 X^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau, \quad (1.1.8)$$

Используя специальное представление непрерывного решения системы (1.1.1) в форме (1.1.3), преобразуем критерий качества процесса управления

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{q,p=0}^l x^T(n-q) D_{qp} x(n-p) + \sum_{k=0}^l x^T(n-k) D_k u(n) + \sum_{k=0}^l u^T(n) D_k^T x(n-k) + u^T(n) \mathcal{D}_u u(n) \right),$$

где коэффициенты критерия качества для системы разностных уравнений определяются формулами

$$D_{00} = \int_0^1 \left(X^{-T}(1) + \int_0^s A_0^T(\tau) X^{-T}(\tau) d\tau \right) X^T(s) D_x(s) X(s) \left(X^{-1}(1) + \int_0^s X^{-1}(\tau) A_0(\tau) d\tau \right) ds, \quad (1.1.9)$$

$$D_{0k} = \int_0^1 \left(X^{-T}(1) + \int_0^s A_0^T(\tau) X^{-T}(\tau) d\tau \right) X^T(s) D_x(s) X(s) \int_0^s X^{-1}(\tau) A_k(\tau) d\tau ds, \quad k=1, \dots, l, \quad (1.1.10)$$

$$D_{pq} = \int_0^1 \int_0^s A_p^T(\tau) X^{-T}(\tau) d\tau X^T(s) D_x(s) X(s) \int_0^s X^{-1}(\tau) A_q(\tau) d\tau ds, \quad D_{qp} = D_{pq}^T, \quad p, q=1, \dots, l, \quad (1.1.11)$$

$$D_0 = \int_0^1 \left(X^{-T}(1) + \int_0^s A_0^T(\tau) X^{-T}(\tau) d\tau \right) X^T(s) D_x(s) X(s) \int_0^s X^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau ds, \quad (1.1.12)$$

$$D_k = \int_0^1 \int_0^s A_k^T(\tau) X^{-T}(\tau) d\tau X^T(s) D_x(s) X(s) \int_0^s X^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau ds, \quad (1.1.13)$$

$$D_u = \int_0^1 \left(\int_0^s B^T(\tau) X^{-T}(\tau) d\tau \quad X^T(s) D_x(s) X(s) \int_0^s X^{-1}(\tau) B(\tau) d\tau + D_u(s) \right) ds. \quad (1.1.14)$$

При нахождении оптимального стабилизирующего управления для дискретной задачи удобно от системы разностных уравнений высокого порядка перейти к разностной системе первого порядка большей размерности. Для этого используем замену переменных [107] $y_n^k = x(n-k)$, $k=0, \dots, l$, и введем в рассмотрение векторы $y_n = \{y_n^k\}_{k=0}^l$ и $u_n = u(n)$, $n \geq 0$. Тогда с учетом этих обозначений система разностных уравнений (1.1.5) запишется в виде

$$y_{n+1} = \mathcal{A}y_n + \mathcal{B}u_n, \quad (1.1.15)$$

где $y_n \in \mathbb{R}^{m(l+1)}$, \mathcal{A} , \mathcal{B} — постоянные матрицы размерностей $m(l+1) \times m(l+1)$ и $m(l+1) \times r$ соответственно, имеющие структуры

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{A}_1 & \dots & \mathcal{A}_{l-1} & \mathcal{A}_l \\ I_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_m & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_m & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1.16)$$

а соответствующий ей критерий качества процесса управления — в виде

$$\mathcal{J} = \sum_{n=0}^{+\infty} (y_n^T \mathcal{D}_y y_n + y_n^T \mathcal{D}_{yu} u_n + u_n^T \mathcal{D}_{yu}^T y_n + u_n^T \mathcal{D}_u u_n), \quad (1.1.17)$$

где \mathcal{D}_y , \mathcal{D}_{yu} , \mathcal{D}_u — постоянные матрицы размерностей $m(l+1) \times m(l+1)$, $m(l+1) \times r$ и $r \times r$ соответственно, определяемые формулами

$$\mathcal{D}_y = \{D_{pq}\}_{p,q=0}^l, \quad \mathcal{D}_{yu} = (D_0^T \dots D_l^T)^T. \quad (1.1.18)$$

В эквивалентной дискретной задаче, с учетом вышеприведенной замены, вектор $y_0 = (x^T(0), x^T(-1), \dots, x^T(-l))^T$ соответствует вектору начальных условий.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть $A^o, A^k, k = 0, \dots, l, B$ — непрерывные 1-периодические функции. Задача оптимальной стабилизации в множестве допустимых управлений U для системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.1.1) и критерия качества процесса управления (1.1.2) эквивалентна задаче оптимальной стабилизации системы разностных уравнений (1.1.15), коэффициенты которой определяются формулами (1.1.16), (1.1.6) – (1.1.8), с дискретным критерием качества процесса управления (1.1.17), коэффициенты которого определяются формулами (1.1.18), (1.1.9) – (1.1.14).

Следствие 1.1. При выполненных условиях теоремы 1.1 задача оптимальной стабилизации в множестве допустимых управлений U для системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.1.1) с критерием качества процесса управления (1.1.2) эквивалентна задаче оптимальной стабилизации системы разностных уравнений

$$y_{n+1} = \tilde{A}y_n + B\tilde{u}_n \quad (1.1.19)$$

с дискретным критерием качества процесса управления

$$\tilde{J} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(y_n^T \tilde{D}_y y_n + \tilde{u}_n^T \mathcal{D}_u \tilde{u}_n \right). \quad (1.1.20)$$

Здесь коэффициенты \tilde{A} и \tilde{D}_y определяются формулами

$$\tilde{A} = A - B\mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{D}_{yu}^T, \quad \tilde{D}_y = \mathcal{D}_y - \mathcal{D}_{yu}\mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{D}_{yu}^T.$$

Доказательство. Сформулированные результаты следствия получаются использованием замены управления

$$u_n = \tilde{u}_n - \mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{D}_{yu}^T y_n, \quad n \geq 0 \quad (1.1.21)$$

в задаче (1.1.15), (1.1.17). □

Требуем выполнения достаточных условий, обеспечивающих существование единственного решения задачи оптимальной стабилизации (1.1.19), (1.1.20) в [40, 71]:

$$(A) \quad \begin{aligned} &\text{пара матриц } \tilde{A} \text{ и } B \text{ управляема,} \\ &\text{пара матриц } \tilde{D}_1 \text{ и } \tilde{A} \text{ идентифицируема.} \end{aligned}$$

Здесь \tilde{D}_1 — произвольная матрица, удовлетворяющая свойству $\tilde{D}_1^T \tilde{D}_1 = \tilde{D}_y$.

Условия (A) являются достаточными для существования единственного решения задачи оптимальной стабилизации (1.1.1), (1.1.2).

Будем предполагать достаточные условия существования решения задачи оптимальной стабилизации (1.1.15), (1.1.17) выполненными. Тогда оптимальное стабилизирующее управление задачи (1.1.15), (1.1.17) допускает представление [71]

$$u_n^0 = - [\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u]^{-1} (\mathcal{B}^T P \mathcal{A} + \mathcal{D}_{yu}^T) y_n, \quad n \geq 0, \quad (1.1.22)$$

где положительно определенная матрица P является единственным решением дискретного уравнения Риккати

$$\mathcal{A}^T P \mathcal{A} - P + \mathcal{D}_y - (\mathcal{A}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_{yu}) [\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u]^{-1} (\mathcal{B}^T P \mathcal{A} + \mathcal{D}_{yu}^T) = 0. \quad (1.1.23)$$

Следует отметить, что в случае если рассматривается дискретная задача оптимальной стабилизации в виде (1.1.19), (1.1.20), то уравнение Риккати принимает вид [68]

$$\tilde{\mathcal{A}}^T P \tilde{\mathcal{A}} - P + \tilde{\mathcal{D}}_y - \tilde{\mathcal{A}}^T P \mathcal{B} [\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u]^{-1} \mathcal{B}^T P \tilde{\mathcal{A}} = 0, \quad (1.1.24)$$

а соответствующее ему оптимальное управление —

$$u_n^0 = - [\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u]^{-1} \mathcal{B}^T P \tilde{\mathcal{A}} y_n. \quad (1.1.25)$$

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и условия (A). Тогда в множестве допустимых управлений U задача оптимальной стабилизации нулевого решения системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными (1.1.1) и критерием качества (1.1.2) имеет единственное решение, определяемое формулой

$$u^0(t, x(\cdot)) = \sum_{j=0}^l K_j x([t - k]), \quad t \in \bar{\mathbb{R}}^+. \quad (1.1.26)$$

Здесь $K = \{K_j\}_{j=0}^l$, $K = - [\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u]^{-1} (\mathcal{B}^T P \mathcal{A} + \mathcal{D}_{yu}^T)$ для задачи (1.1.15), (1.1.17) или $K = - [\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u]^{-1} \mathcal{B}^T P \tilde{\mathcal{A}}$ для задачи (1.1.19), (1.1.20), P — решение соответствующего уравнения Риккати.

Значение показателя качества (1.1.2) для решения системы (1.1.1), определяемого начальным вектором $y_0 = (x^T(0), x^T(-1), \dots, x^T(-l))^T$ и оптимальным стабилизирующим управлением (1.1.26), определяется формулой

$$J^0 = y_0^T P y_0.$$

Пример 1.1. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = a^o(t)x(t) + a_0(t)x([t]) + b(t)u, \quad (1.1.27)$$

коэффициенты $a^o(t)$, $a_0(t)$, $b(t)$ которого являются непрерывными 1-периодическими функциями. Критерий качества процесса управления имеет вид

$$J = \int_0^{+\infty} (x^2(t) + u^2(t)) dt.$$

Коэффициенты эквивалентной дискретной задачи (1.1.15), (1.1.17) определяются формулами

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 = e^{\int_0^1 a^o(\tau) d\tau} \left(1 + \int_0^1 e^{-\int_0^\vartheta a^o(\tau) d\tau} a_0(\vartheta) d\vartheta \right), \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_0 = e^{\int_0^1 a^o(\tau) d\tau} \int_0^1 e^{-\int_0^\vartheta a^o(\tau) d\tau} b(\vartheta) d\vartheta,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_y = D_{00} &= \int_0^1 \left(e^{-\int_0^1 a^o(\tau) d\tau} + \int_0^s a_0(t) e^{-\int_0^t a^o(\tau) d\tau} dt \right)^2 e^{2\int_0^s a^o(\tau) d\tau} ds \\ \mathcal{D}_{yu} = D_0 &= \int_0^1 \left(e^{-\int_0^1 a^o(\tau) d\tau} + \int_0^s a_0(t) e^{-\int_0^t a^o(\tau) d\tau} dt \right) \int_0^s b(t) e^{-\int_0^t a^o(\tau) d\tau} dt e^{2\int_0^s a^o(\tau) d\tau} ds, \\ \mathcal{D}_u &= \int_0^1 \left(\int_0^s b(t) e^{-\int_0^t a^o(\tau) d\tau} dt \right)^2 e^{2\int_0^s a^o(\tau) d\tau} ds + 1. \end{aligned}$$

Дискретное уравнение Риккати (1.1.23) имеет вид

$$(1 - \mathcal{A}_0^2)P + \frac{(\mathcal{A}_0\mathcal{B}_0P + D_0)^2}{\mathcal{B}_0^2P + \mathcal{D}_u} - D_{00} = 0.$$

Его положительное решение определяется формулой

$$P = \frac{-(1 - \mathcal{A}_0^2) \mathcal{D}_u - 2\mathcal{A}_0\mathcal{B}_0D_0 + \mathcal{B}_0^2D_{00} + \sqrt{\Delta}}{2\mathcal{B}_0^2},$$

где $\Delta = ((1 - \mathcal{A}_0^2) \mathcal{D}_u + 2\mathcal{A}_0\mathcal{B}_0D_0 - \mathcal{B}_0^2D_{00})^2 + 4\mathcal{B}_0^2(-D_0^2 + \mathcal{D}_uD_{00}) > 0$. Оптимальное стабилизирующее управление дискретной задачи имеет вид

$$u_n^0 = -[\mathcal{B}_0^2P + \mathcal{D}_u]^{-1} (\mathcal{A}_0\mathcal{B}_0P + D_0) y_n,$$

а соответствующее ему стабилизирующее управление исходной задачи —

$$u^0(t, x(\cdot)) = -[\mathcal{B}_0^2P + \mathcal{D}_u]^{-1} (\mathcal{A}_0\mathcal{B}_0P + D_0) x([t]), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Зададимся следующими функциями

$$a^o(t) = \cos(2\pi t), \quad a_0(t) = \sin(2\pi t) - 4, \quad b(t) = 2 \cos(2\pi t) + 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Коэффициенты эквивалентной задачи оптимальной стабилизации (1.1.15), (1.1.17) имеют вид

$$\mathcal{A}_0 = -3.1052, \mathcal{B}_0 = 1.00634, D_{00} = 1.75613, D_0 = -0.415696, \mathcal{D}_u = 1.25471.$$

Используя эти коэффициенты найдем решение уравнения Риккати $P = 10.0966$. Стабилизирующее управление находится в виде $u^0(t, x(\cdot)) = 2.78459x([t]), t \in \mathbb{R}^+$. Значение показателя качества для решения с начальным условием $x(0) = -5$ и оптимальным управлением $J^0 = 252.416$.

Ниже приведены графики стабилизированного решения с начальным значением $x(0) = -5$ и соответствующего ему стабилизирующего управления.

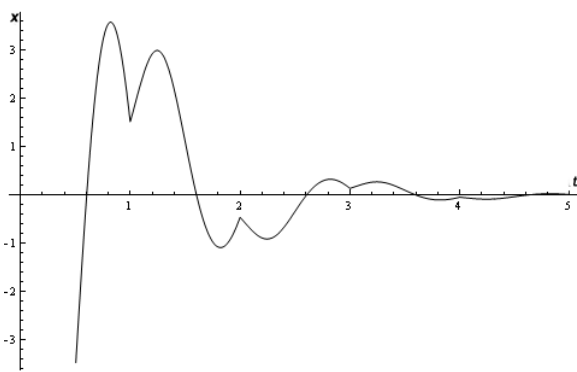


Рис. 1.1. График стабилизированного решения с начальным условием $x(0) = -5$

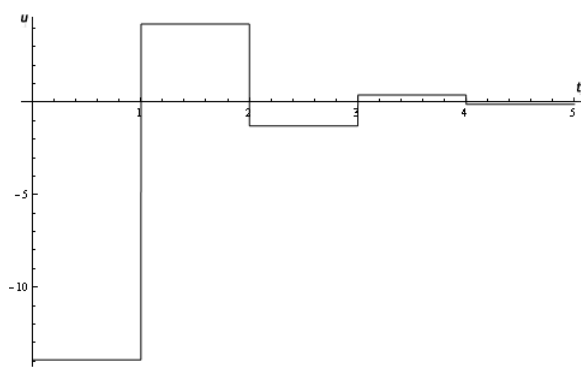


Рис. 1.2. График стабилизирующего управления

Пример 1.2. Пусть движения описываются скалярным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}(t) = ax([t]) + bu, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad b \neq 0,$$

а критерий качества процесса управления задается функционалом

$$J = \int_0^{+\infty} (x^2(t) + u^2(t)) dt.$$

Эквивалентная задача оптимальной стабилизации дискретного уравнения (1.1.15) с критерием качества процесса управления (1.1.17) в данном случае запишется в виде

$$y_{n+1} = (a + 1)y_n + bu_n, \quad n \geq 0.$$

$$\mathcal{J} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\left(1 + a + \frac{a^2}{3}\right) y_n^2 + \left(\frac{2ab}{3} + b\right) y_n u_n + \left(1 + \frac{b^2}{3}\right) u_n^2 \right).$$

Использование замены управления (1.1.21) приводит к дискретной задаче оптимальной стабилизации (1.1.19), (1.1.20) следующего вида

$$y_{n+1} = \frac{6 + 6a - b^2}{6 + 2b^2} y_n + b\tilde{u}_n, n \geq 0. \quad (1.1.28)$$

$$\tilde{J} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{12 + 12a + 4a^2 + b^2}{12 + 4b^2} y_n^2 + \left(1 + \frac{b^2}{3} \right) \tilde{u}_n^2 \right). \quad (1.1.29)$$

Уравнение Риккати в форме (1.1.24) принимает вид

$$\frac{12 + 12a(1 + 2P) + 4a^2(1 + 3P) + b^2(1 - 12P^2)}{4(3 + b^2(1 + 3P))} = 0.$$

Единственное положительное решение этого уравнения определяется формулой

$$P = \frac{2a + a^2 + \sqrt{(2a + a^2)^2 + \frac{1}{3}b^2(12 + 12a + 4a^2 + b^2)}}{2b^2},$$

а соответствующее ему оптимальное управление в задаче (1.1.28), (1.1.29) — формулой

$$\tilde{u}_n^0 = \frac{(6 + 6a - b^2) \left(2a + a^2 + \sqrt{(2a + a^2)^2 + \frac{1}{3}b^2(12 + 12a + 4a^2 + b^2)} \right)}{4b(3 + b^2) \left(1 + \frac{b^2}{3} + \frac{1}{2} \left(2a + a^2 + \sqrt{(2a + a^2)^2 + \frac{1}{3}b^2(12 + 12a + 4a^2 + b^2)} \right) \right)} y_n, n \geq 0.$$

Формула (1.1.21) позволяет найти управление, стабилизирующее решение исходного скалярного дифференциального уравнения, в виде

$$u^0(t, x(\cdot)) = \frac{b(6 + 6a - b^2) \left((1.5 + a)b/(3 + b^2) + \left(2a + a^2 + \sqrt{(2a + a^2)^2 + \frac{1}{3}b^2(12 + 12a + 4a^2 + b^2)} \right) / 2b^2 \right)}{2(3 + b^2) \left(1 + b^2/3 + b^2 \left((1.5 + a)b/(3 + b^2) + \left(2a + a^2 + \sqrt{(2a + a^2)^2 + \frac{1}{3}b^2(12 + 12a + 4a^2 + b^2)} \right) / 2b^2 \right) \right)} x([t]), t \in \mathbb{R}^+.$$

Зададимся значениями $a = 2.5$, $b = 1$. Тогда искомое стабилизирующее управление в задаче имеет вид $u^0(t, x(\cdot)) = -3.24489x([t])$, $t \in \mathbb{R}^+$. Значение показателя критерия качества для решения с начальным значением $x(0) = -7$ и оптимальным управлением $J^0 = 574.9155$.

Графики стабилизируемого решения с начальным значением $x(0) = -7$ и соответствующего ему стабилизирующего управления приведены на рисунках 1.3, 1.4

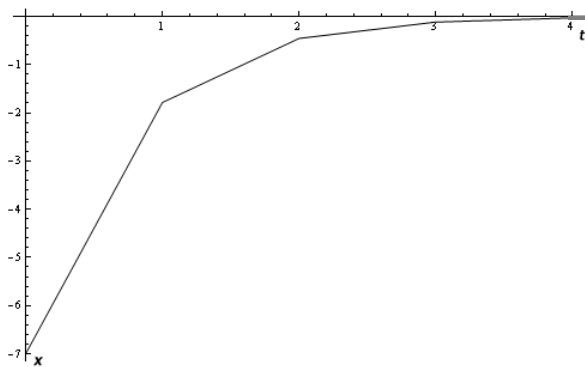


Рис. 1.3. График стабилизированного решения с начальным условием $x(0) = -7$

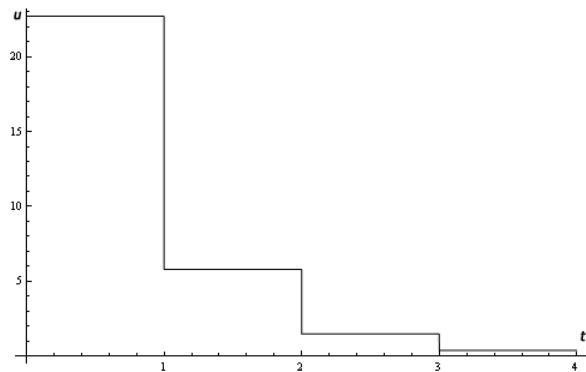


Рис. 1.4. График стабилизирующего управления

§1.2. Численные методы решения дискретного уравнения Риккати

1.2.1. Метод Ньютона

Метод Ньютона является общим универсальным методом решения нелинейных уравнений. Его эффективность уменьшается при увеличении размерности уравнения [87].

Учитывая специальную структуру матриц \mathcal{A} и \mathcal{B} , можно дискретное уравнение Риккати (1.1.23) заменить системой дискретных уравнений меньшей размерности. Пусть матрица P имеет блочный вид

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & \dots & P_{0l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{l0} & \dots & P_{ll} \end{pmatrix}, \quad (1.2.1)$$

в котором для каждого блока P_{ij} , $i, j = 0, \dots, l$, размерности $m \times m$ выполнено свойство $P_{ij}^T = P_{ji}$, $i, j = 0, \dots, l$. Опишем структуры следующих матриц

$$\mathcal{A}^T P \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0^T P_{00} \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_0^T P_{01} + P_{10} \mathcal{A}_0 + P_{11} & \dots & \mathcal{A}_0^T P_{00} \mathcal{A}_j + \mathcal{A}_0^T P_{0(j+1)} + P_{10} \mathcal{A}_j + P_{1(j+1)} & \dots & \mathcal{A}_0^T P_{00} \mathcal{A}_l + P_{10} \mathcal{A}_l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_i^T P_{00} \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_i^T P_{01} + P_{(i+1)0} \mathcal{A}_0 + P_{(i+1)1} & \dots & \mathcal{A}_i^T P_{00} \mathcal{A}_j + \mathcal{A}_i^T P_{0(j+1)} + P_{(i+1)0} \mathcal{A}_j + P_{(i+1)(j+1)} & \dots & \mathcal{A}_i^T P_{00} \mathcal{A}_l + P_{(i+1)0} \mathcal{A}_l \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_l^T P_{01} & \dots & \mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{A}_j + \mathcal{A}_l^T P_{0(j+1)} & \dots & \mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{A}_l \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}^T P \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + P_{10} \mathcal{B}_0 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_i^T P_{00} \mathcal{B}_0 + P_{(i+1)0} \mathcal{B}_0 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{B}_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}^T P \mathcal{B} = \mathcal{B}_0^T C_{00} \mathcal{B}_0.$$

Используя представления этих матриц в уравнении (1.1.23), получим новую систему уравнений для определения блочных элементов матрицы P

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_i^T P_{00} \mathcal{A}_j + \mathcal{A}_i^T P_{0(j+1)} + P_{(i+1)0} \mathcal{A}_j + P_{(i+1)(j+1)} - P_{ij} + D_{ij} - (\mathcal{A}_i^T P_{00} \mathcal{B}_0 + P_{(i+1)0} \mathcal{B}_0 + D_i) \times \\ & \times (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{A}_j + \mathcal{B}_0^T P_{(j+1)0}^T + D_j^T) = 0, \quad i, j = 0, \dots, l-1, \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{A}_j + \mathcal{A}_l^T P_{0(j+1)} - P_{lj} + D_{lj} - (\mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{B}_0 + D_l) (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} \times \\ & \times (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{A}_j + \mathcal{B}_0^T P_{(j+1)0}^T + D_j^T) = 0, \quad j = 0, \dots, l-1, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

$$\mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{A}_l - P_{ll} + D_{ll} - (\mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{B}_0 + D_l) (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{A}_l + D_l^T) = 0. \quad (1.2.4)$$

Систему уравнений (1.2.2) перепишем в следующем виде

$$P_{(i+1)(j+1)} = P_{ij} + H_{ij}, \quad i, j = 0, \dots, l-1,$$

где

$$\begin{aligned} H_{ij} = & -\mathcal{A}_i^T P_{00} \mathcal{A}_j - \mathcal{A}_i^T P_{0(j+1)} - P_{0(i+1)}^T \mathcal{A}_j - D_{ij} + (\mathcal{A}_i^T P_{00} \mathcal{B}_0 + P_{0(i+1)}^T \mathcal{B}_0 + D_i) \times \\ & \times (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{A}_j + \mathcal{B}_0^T P_{0(j+1)}^T + D_j^T), \quad i, j = 0, \dots, l-1. \end{aligned}$$

Решение последней системы, линейной относительно неизвестных P_{ij} , $1 \leq j \leq i$, $1 \leq i \leq l$, определяется формулами

$$P_{ij} = P_{(i-j)0} + \sum_{p=0}^{j-1} H_{(p+i-j)p}, \quad 1 \leq j \leq i, \quad 1 \leq i \leq l. \quad (1.2.5)$$

Разрешая уравнения (1.2.3), (1.2.4) относительно неизвестных P_{lj} , $j = 1, \dots, l$, находим

$$\begin{aligned} P_{lj} = & \mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{A}_j + \mathcal{A}_l^T P_{0(j+1)} + D_{lj} - (\mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{B}_0 + D_l) (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} \times \\ & \times (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{A}_j + \mathcal{B}_0^T P_{0(j+1)}^T + D_j^T), \quad j = 0, \dots, l-1, \end{aligned}$$

$$P_{ll} = \mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{A}_l + D_{ll} - (\mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{B}_0 + D_l) (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{A}_l + D_l^T).$$

Подставляя найденные выражения в формулы (1.2.5), получим систему дискретных уравнений

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_l^T P_{01} - P_{l0} + D_{l0} - (\mathcal{A}_l^T P_{00} \mathcal{B}_0 + D_l) \times \\ & \times (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{A}_0 + \mathcal{B}_0^T P_{01} + D_0^T) = 0, \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=0}^j \left(\mathcal{A}_{p+l-j}^T P_{00} \mathcal{A}_p + (\mathcal{A}_{p+l-j}^T P_{00} \mathcal{B}_0 + D_{p+l-j}) (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{A}_p + D_p^T) \right) + \\
& + \sum_{p=0}^j (\mathcal{A}_{p+l-j}^T - (\mathcal{A}_{p+l-j}^T P_{00} \mathcal{B}_0 + D_{p+l-j}) (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} \mathcal{B}_0^T) P_{(p+1)0}^T - \\
& \sum_{p=0}^{j-1} P_{(p+l-j)0} (\mathcal{A}_p - \mathcal{B}_0 (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{A}_p + D_p^T)) - \\
& - \sum_{p=0}^{j-1} P_{(p+l-j)0} \mathcal{B}_0 (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} \mathcal{B}_0^T P_{(p+1)0}^T - P_{(l-j)0} + \sum_{p=0}^{j-1} D_{(p+l-j)p} = 0, \quad j = 1, \dots, l-1,
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

$$\begin{aligned}
& P_{00} - \sum_{p=0}^l (\mathcal{A}_p^T P_{00} \mathcal{A}_p - (\mathcal{A}_p^T P_{00} \mathcal{B}_0 + D_p) (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{A}_p + D_p^T)) - \\
& - \sum_{p=0}^{l-1} P_{(p+1)0} (\mathcal{A}_p - \mathcal{B}_0 (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{A}_p + D_p^T)) + \\
& + \sum_{p=0}^{l-1} (\mathcal{A}_p^T - (\mathcal{A}_p^T P_{00} \mathcal{B}_0 + D_p) (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} \mathcal{B}_0^T) P_{(p+1)0}^T + \\
& + \sum_{p=0}^{l-1} P_{(p+1)0} \mathcal{B}_0 (\mathcal{B}_0^T P_{00} \mathcal{B}_0 + \mathcal{D}_u)^{-1} \mathcal{B}_0^T P_{(p+1)0}^T - \sum_{p=0}^l D_{pp} = 0.
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Полученные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1.3. *Элементы P_{i0} , $P_{i0} = P_{0i}^T$, $i = 0, \dots, l$, блочного представления (1.2.1) решения дискретного уравнения Риккати (1.1.23) удовлетворяют замкнутой системе нелинейных алгебраических уравнений (1.2.6) – (1.2.8). Элементы P_{ij} , $i, j = 0, \dots, l$, при одновременном выполнении условий $i \neq 0$ и $j \neq 0$, определяются формулами (1.2.5).*

Теорема 1.3 в общем случае позволяет существенно понизить порядок нелинейной алгебраической системы, определяющей решение уравнения Риккати. Решение системы нелинейных алгебраических уравнений (1.2.6) – (1.2.8) будем осуществлять с помощью численной реализации метода Ньютона из состава пакета Wolfram Mathematica.

Пример 1.3. Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение с кусочно-постоянным аргументом

$$\frac{dx(t)}{dt} = A^\circ(t)x(t) + A_0(t)x([t]) + B(t)u, \quad t \in \bar{\mathbb{R}}^+, \tag{1.2.9}$$

где коэффициенты определены следующим образом

$$A^\circ(t) = \begin{bmatrix} 3 \sin(2\pi t) & 2 \cos(4\pi t) \\ -2 \cos(4\pi t) & -\sin(2\pi t) \end{bmatrix},$$

$$A_0(t) = \begin{bmatrix} 2 \sin(2\pi t) + 1 & \cos(4\pi t) \\ 0.5 \cos(4\pi t) + 1 & 0.5 \sin^2(4\pi t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} -6 \sin(6\pi t) + 1 \\ 0.5 \cos(4\pi t) + 2 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Коэффициенты критерия качества процесса управления (1.1.2) определяются формулами

$$D_x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_u(t) = \sin(4\pi t) + 1.2 \quad t \in \bar{\mathbb{R}}^+. \quad (1.2.10)$$

Используя теорему 1.1, найдем коэффициенты разностной системы (1.1.15) и критерия качества (1.1.17)

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1.67861 & 0.0797166 \\ 0.795497 & 1.28426 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = (0.720163 \quad 2.32211)^T, \quad (1.2.11)$$

$$\mathcal{D}_y = \begin{bmatrix} 8.72473 & 0.39772 \\ 0.39772 & 1.01085 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{yu} = (0.429799 \quad 1.07059)^T, \quad \mathcal{D}_u = 2.80178. \quad (1.2.12)$$

Так как в данном случае $l = 0$, то матрица P совпадает с P_{00} , а система нелинейных алгебраических уравнений из теоремы 1.3 содержит только уравнение (1.2.8). Для элементов p_{ij} , $1 \leq i, j \leq 2$, матрицы $P = P_{00}$ матричное уравнение (1.2.8) эквивалентно системе скалярных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{-24.2601 + 0.518635p_{11}^2 - 32.8202p_{12} + 11.0558p_{12}^2 + p_{11}(-8.57868 + 3.3446p_{12} - 5.66362p_{22}) - 47.2307p_{22}}{2.80178 + 0.518635p_{11} + 3.3446p_{12} + 5.39221p_{22}} &= 0, \\ \frac{-0.654185 + 0.88486p_{12}^2 - 1.74758p_{22} + p_{11}(0.73769 + 0.51864p_{12} + 2.45975p_{22}) + p_{12}(0.51736 + 5.39221p_{22})}{2.80178 + 0.518635p_{11} + 3.3446p_{12} + 5.39221p_{22}} &= 0, \\ \frac{-1.68603 + 0.54726p_{12}^2 + p_{11}(-0.41915 - 0.02862p_{22}) - 0.88458p_{22} + 5.39221p_{22}^2 + p_{12}(-1.5779 + 3.3446p_{22})}{2.80178 + 0.518635p_{11} + 3.3446p_{12} + 5.39221p_{22}} &= 0. \end{aligned}$$

Применив метод Ньютона для численного решения полученной системы нелинейных уравнений, найдем положительно определенную матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 157.425 & -30.9839 \\ -30.9839 & 7.23792 \end{pmatrix}.$$

Оптимальное стабилизирующее управление, определяемое формулой (1.1.22), имеет вид

$$u^0(t, x(\cdot)) = (-3.30438 \quad 0.13597) x([t]), \quad t \in \hat{\mathbb{R}}^+.$$

Значение показателя качества для решения с начальным значением $x(0) = (15 \ 7)^T$ и оптимальным управлением $J^0 = 29268.7$.

Метод Ньютона для решения задач оптимальной стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений (1.1.1) с критерием качества (1.1.2) реализован в модуле «PCANewtonMethodPC.m» программного комплекса PCAStab для Wolfram

Mathematica 8. Время решения данного примера средствами программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8 составило 121.344с¹.

Ниже приведены графики стабилизированного решения с начальным значением $x(0) = (15 \ 7)^T$ и соответствующего ему стабилизирующего управления.

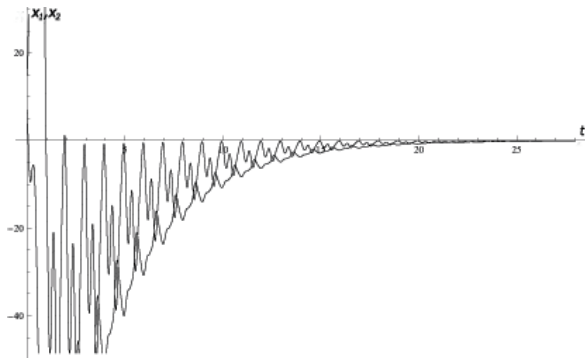


Рис. 1.5. График стабилизированного решения с начальным условием $x(0) = (15 \ 7)^T$

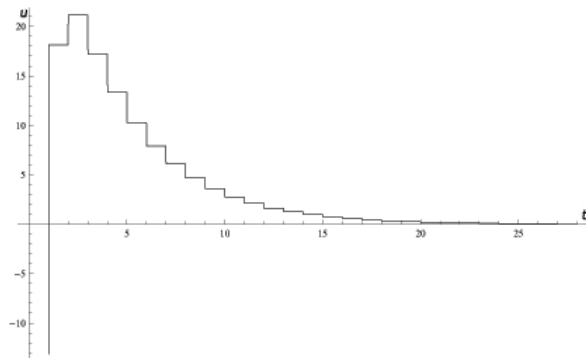


Рис. 1.6. График стабилизирующего управления

Пример 1.4. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{dx(t)}{dt} = a^o(t)x(t) + a_0(t)x([t]) + a_1(t)x([t-1]) + b(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad (1.2.13)$$

где коэффициенты определены следующим образом

$$a^o(t) = -4\cos(4\pi t) + 2, \quad a_0(t) = 0.5\cos(4\pi t) + 1, \quad a_1(t) = \cos^2(4\pi t) + 1, \quad b(t) = -\sin(6\pi t) + 2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть критерий качества процесса управления задается функционалом (1.1.2), в котором

$$D_x(t) = 3, \quad D_u(t) = \sin^2(4\pi t) + 3, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Используя теорему 1.1, построим эквивалентную дискретную задачу оптимальной стабилизации (1.1.15), (1.1.17) с коэффициентами

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 10.8841 & 5.11571 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = (6.47199 \ 0)^T,$$

$$\mathcal{D}_y = \begin{bmatrix} 16.7801 & 18.7953 \\ 18.7953 & 21.0832 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_{yu} = (23.4782 \ 26.348)^T, \quad \mathcal{D}_u = 36.4384.$$

¹Здесь и далее решение примеров осуществлялось на вычислительной базе ЭВМ Intel(R) Core(TM) i5-2400 CPU с частотой 1.58 ГГц, 4Гб ОЗУ.

Система нелинейных алгебраических уравнений (1.2.6), (1.2.8) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{-66.2681 + 20.5537P_{01} + P_{00}(-182.827 + 41.8867P_{01})}{36.4384 + 41.8867P_{00}} &= 0, \\ \frac{-134.237 - 1767.37P_{00} + 41.8867P_{00}^2 + 41.8867P_{01}^2}{36.4384 + 41.8867P_{00}} &= 0, \end{aligned}$$

где в силу $m = 1$ искомые элементы матрицы Риккати P_{00} , P_{01} являются скалярными величинами. Методом Ньютона находятся два действительных решения этой системы $P_{00} = 41.8179$, $P_{01} = 4.35156$ и $P_{00} = 0.23054$, $P_{01} = 3.58874$. Формула (1.2.5) позволяет восстановить недостающий элемент P_{11} матрицы P . Для первого решения вычислим $P_{11} = 1.00257$, для второго — $P_{11} = -36.0283$. Из двух матриц, полученных с помощью теоремы 1.3, требуется выбрать положительно определенную. Таким образом, получим

$$P = \begin{pmatrix} 41.8179 & 4.35156 \\ 4.35156 & 1.00257 \end{pmatrix}.$$

Откуда оптимальное стабилизирующее управление, определяемое формулой (1.1.22), находится в виде

$$u^0(t, x(\cdot)) = -1.67633x([t]) - 0.789066x([t - 1]), \quad t \in \bar{\mathbb{R}}^+.$$

Значение показателя качества для решения с начальными значениями $x(0) = (15 \ 7)^T$ и оптимальным управлением $J^0 = 9863.08$. Время решения средствами программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8 составило 2.313с.

Графики стабилизированного решения с начальными значениями $x(-1) = 7$, $x(0) = 15$ и соответствующего ему стабилизирующего управления приведены на рисунках 1.7, 1.8.

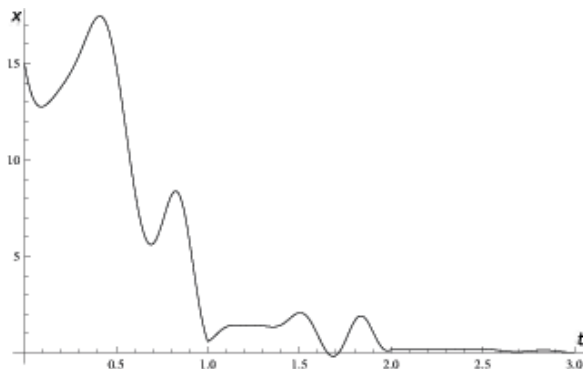


Рис. 1.7. График стабилизированного решения с начальными условиями $x(-1) = 7$, $x(0) = 15$

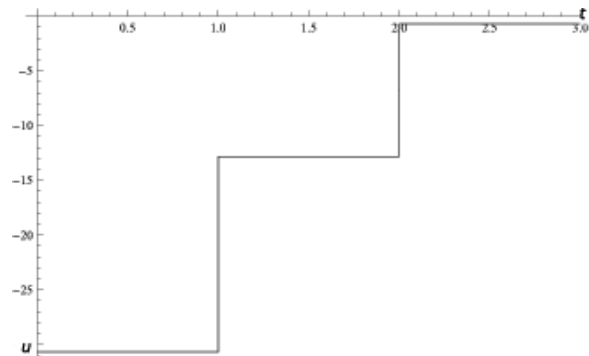


Рис. 1.8. График стабилизирующего управления

1.2.2. Метод приведения к устойчивой форме Шура

В работах [20, 68] предложена специальная процедура решения дискретного уравнения Риккати, основанная на приведении некоторой матрицы, отождествляемой с коэффициентами задачи, к устойчивой форме Шура — верхней треугольной матрице с собственными значениями на диагонали, упорядоченными по возрастанию их модулей. Если матрица \tilde{A} невырождена, то уравнению Риккати (1.1.24) можно поставить в соответствие матрицу

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \tilde{A} + \mathcal{F}\tilde{A}^{-T}\tilde{\mathcal{D}}_y & -\mathcal{F}\tilde{A}^{-T} \\ -\tilde{A}^{-T}\tilde{\mathcal{D}}_y & \tilde{A}^{-T} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{F} = \mathcal{B}\mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{B}^T$.

Для решения уравнения Риккати необходимо привести матрицу \mathcal{M} к верхней форме Шура R . Это достигается применением QR-разложения. Опишем процедуру построения QR-разложения матрицы \mathcal{M} методом отражений.

Матрицей отражения называется матрица вида $L = L(x) = I_M - 2xx^*$, где $\|x\| = 1$, $M = 2m(l + 1)$.

Матрица отражения обладает следующими свойствами.

Лемма 1.1 ([46]). *Матрица отражения является самосопряженной унитарной матрицей. Пусть e — произвольный единичный вектор: $\|e\| = 1$. Тогда для всякого вектора $y \in \mathbf{C}^M$ существует вектор $x \in \mathbf{C}^M$, $\|x\| = 1$, такой, что $L(x)y = \|y\|e$.*

Обозначим $\mathcal{M}_1 = (\mathcal{M}_{11} \dots \mathcal{M}_{M1})^T$ первый столбец матрицы \mathcal{M} . Согласно лемме 1.1 существует вектор $x^{(1)} \in \mathbf{C}^M$, равный

$$x^{(1)} = \pm \frac{\mathcal{M}_1 - \|\mathcal{M}_1\|e_1}{\|\mathcal{M}_1 - \|\mathcal{M}_1\|e_1\|},$$

такой, что $L(x^{(1)})\mathcal{M}_1 = \|\mathcal{M}_1\|e_1$, где $e_1 = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T \in \mathbf{R}^M$, $L_1 = L(x^{(1)})$ — матрица отражения. Таким образом,

$$\mathcal{M}^{(1)} = L_1\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \|\mathcal{M}_1\| & R_{12} & \dots & R_{1M} \\ 0 & \mathcal{M}_{22}^{(1)} & \dots & \mathcal{M}_{2M}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathcal{M}_{22}^{(1)} & \dots & \mathcal{M}_{2M}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Далее процесс применяется к матрице $(\mathcal{M}_{ij}^{(1)})_{i,j=2,\dots,M}$.

Пусть сделаны $k - 1$, $k = 1, \dots, M$, шагов этого процесса, т.е. получено равенство

$\mathcal{M}^{(k-1)} = \prod_{i=k-1}^1 L_i \mathcal{M}$, где матрица $\mathcal{M}^{(k-1)}$ имеет вид

$$\mathcal{M}^{(k-1)} = \begin{pmatrix} \|\mathcal{M}_1\| & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1(k-1)} & R_{1k} & \dots & R_{1M} \\ 0 & \|\mathcal{M}_1^{(1)}\| & R_{23} & \dots & R_{2(k-1)} & R_{2k} & \dots & R_{2M} \\ 0 & 0 & \|\mathcal{M}_1^{(2)}\| & \dots & R_{3(k-1)} & R_{3k} & \dots & R_{3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|\mathcal{M}_1^{(k-2)}\| & R_{(k-1)k} & \dots & R_{(k-1)M} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathcal{M}_{kk}^{(k-1)} & \dots & \mathcal{M}_{kM}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathcal{M}_{Mk}^{(k-1)} & \dots & \mathcal{M}_{MM}^{(k-1)} \end{pmatrix}, \quad (1.2.14)$$

$$L_i = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 \\ 0 & L(x^{(i)}) \end{pmatrix}.$$

Здесь I_{i-1} — единичная матрица размера $(i-1) \times (i-1)$, $L(x^{(i)})$ — матрица отражения размера $(M-i+1) \times (M-i+1)$, построенная по вектору

$$x^{(i)} = \pm \frac{\mathcal{M}_1^{(i-1)} - \|\mathcal{M}_1^{(i-1)}\| e_1^{(M-i+1)}}{\|\mathcal{M}_1^{(i-1)} - \|\mathcal{M}_1^{(i-1)}\| e_1^{(M-i+1)}\|},$$

где $e_1^i = (1 \ 0 \ \dots \ 0) \in \mathbf{R}^i$, $i = 1, \dots, M$.

Обозначим $\mathcal{M}_1^{(k-1)} = \left(\mathcal{M}_{kk}^{(k-1)} \ \dots \ \mathcal{M}_{Mk}^{(k-1)} \right)^T \in \mathbf{R}^{M-k+1}$ — первый столбец матрицы $\left(\mathcal{M}_{ij}^{(k-1)} \right)_{i,j=k,\dots,M}$. Согласно лемме 1.1 существует матрица отражения

$$L(x^{(k)}) = I - 2x^{(k)}x^{(k)T}, \quad x^{(k)} = \pm \frac{\mathcal{M}_1^{(k-1)} - \|\mathcal{M}_1^{(k-1)}\| e_1^{(M-k+1)}}{\|\mathcal{M}_1^{(k-1)} - \|\mathcal{M}_1^{(k-1)}\| e_1^{(M-k+1)}\|} \in \mathbf{R}^{M-k+1},$$

такая, что $L(x^{(k)}) \mathcal{M}_1^{(k-1)} = \|\mathcal{M}_1^{(k-1)}\| e_1^{(M-k+1)}$. Положим

$$L_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & L(x^{(k)}) \end{pmatrix}. \quad (1.2.15)$$

Покажем, что матрица L_k является унитарной, т.е. $L_k^* = L_k^{-1}$. В силу унитарности матрицы отражения $L(x^{(k)})$ имеем

$$L_k^* = \begin{pmatrix} I_{k-1}^* & 0 \\ 0 & L^*(x^{(k)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & L(x^{(k)}) \end{pmatrix} = L_k,$$

$$L_k L_k^* = L_k L_k = \begin{pmatrix} I_{k-1}^2 & 0 \\ 0 & L^2(x^{(k)}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & I_{M-k+1} \end{pmatrix} = I_M,$$

что означает $L_k^* = L_k^{-1}$, т.е. унитарность матрицы L_k .

Таким образом, справедливо равенство

$$\mathcal{M}^{(k)} = L_k \mathcal{M}^{(k-1)} = \prod_{i=k}^1 L_i \mathcal{M}, \quad (1.2.16)$$

где

$$\mathcal{M}^{(k)} = \begin{pmatrix} \|\mathcal{M}_1\| & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1(k-1)} & R_{1k} & R_{1(k+1)} & \dots & R_{1M} \\ 0 & \|\mathcal{M}_1^{(1)}\| & R_{23} & \dots & R_{2(k-1)} & R_{2k} & R_{2(k+1)} & \dots & R_{2M} \\ 0 & 0 & \|\mathcal{M}_1^{(2)}\| & \dots & R_{3(k-1)} & R_{3k} & R_{3(k+1)} & \dots & R_{3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|\mathcal{M}_1^{(k-2)}\| & R_{(k-1)k} & R_{(k-1)(k+1)} & \dots & R_{(k-1)M} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \|\mathcal{M}_1^{(k-1)}\| & R_{k(k+1)} & \dots & R_{kM} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{M}_{(k+1)(k+1)}^{(k)} & \dots & \mathcal{M}_{(k+1)M}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{M}_{M(k+1)}^{(k)} & \dots & \mathcal{M}_{MM}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что при умножении матрицы L_k вида (1.2.15) на матрицу $\mathcal{M}^{(k-1)}$ вида (1.2.14) она умножается только на подматрицу $(\mathcal{M}_{ij}^{(k-1)})_{i,j=k,\dots,M}$ матрицы $\mathcal{M}^{(k-1)}$ размера $M-k+1$ (остальная часть $\mathcal{M}^{(k-1)}$ в преобразовании (1.2.16) не участвует).

После M шагов этого процесса, получим равенство

$$R = \mathcal{M}^{(k)} = \prod_{i=M}^1 L_i \mathcal{M}, \quad (1.2.17)$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \|\mathcal{M}_1\| & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1(M-2)} & R_{1(M-1)} & R_{1M} \\ 0 & \|\mathcal{M}_1^{(1)}\| & R_{23} & \dots & R_{2(M-2)} & R_{2(M-1)} & R_{2M} \\ 0 & 0 & \|\mathcal{M}_1^{(2)}\| & \dots & R_{3(M-2)} & R_{3(M-1)} & R_{3M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \|\mathcal{M}_1^{(M-3)}\| & R_{(M-2)(M-1)} & R_{(M-2)M} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \|\mathcal{M}_1^{(M-2)}\| & R_{(M-1)M} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \|\mathcal{M}_1^{(M-1)}\| \end{pmatrix}. \quad (1.2.18)$$

Теорема 1.4 ([46]). *Всякая невырожденная матрица M может быть представлена в виде $M = QR$, где матрица Q — унитарная, а матрица R — верхняя треугольная с вещественными положительными элементами на главной диагонали. Это разложение единственно.*

Следует отметить, что в силу построения матрицы $\mathcal{M}^{(k)}$, $k = 1, \dots, M$, имеют те же собственные значения, что и матрица \mathcal{M} . Переупорядочением формы Шура R , необходимо перейти к другой форме \tilde{R} , содержащей в верхних $m(l+1)$ позициях главной диагонали устойчивые собственные значения. Пусть Q - унитарная матрица, трансформирующая \mathcal{M} к форме R , а V - произведение унитарных преобразований, использованных при переупорядочении. Пусть матрица $U = QV$ имеет блочную структуру

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix},$$

каждый блок которой имеет размерность $m(l+1) \times m(l+1)$. Тогда искомая матрица P — решение дискретного уравнения Риккати (1.1.24) — может быть найдена как [68]

$$P = U_{21}U_{11}^{-1}. \quad (1.2.19)$$

Пример 1.5. Пусть объект управления описывается системой дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.2.9) примера 1.3, а критерий качества процесса управления задан в виде (1.1.2) с коэффициентами (1.2.10).

Коэффициенты эквивалентной дискретной задачи (1.1.15), (1.1.17), определяемые теоремой 1.1, находятся в форме (1.2.11), (1.2.12). Используя следствие 1.1 из теоремы 1.1, вычислим коэффициенты эквивалентной дискретной задачи в виде (1.1.19), (1.1.20). Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}} &= \begin{bmatrix} 1.56813 & -0.195465 \\ 0.43928 & 0.396958 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = (0.720163 \quad 2.32211)^T, \\ \tilde{\mathcal{D}}_y &= \begin{bmatrix} 8.6588 & 0.23349 \\ 0.23349 & 0.60177 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_u = 2.80178. \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Вычислим матрицу \mathcal{M} для дискретного уравнения Риккати (1.1.24)

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 4.17421 & 0.59328 & -0.26844 & -1.20655 \\ 8.84237 & 2.94021 & -0.86556 & -3.89044 \\ -4.70759 & 0.24234 & 0.5604 & -0.62015 \\ -2.90625 & -1.39663 & 0.275945 & 2.21379 \end{pmatrix}.$$

Находим устойчивую форму Шура матрицы \mathcal{M}

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0.130055 & -0.811912 & -2.14502 & 0.725952 \\ 0 & 0.768861 & 1.21939 & -5.06852 \\ 0 & 0 & 1.30063 & 8.1196 \\ 0 & 0 & 0 & 7.68907 \end{pmatrix}.$$

Вычислим блочные элементы матрицы унитарного преобразования U

$$U_{11} = \begin{pmatrix} 0.0732546 & 0.10874 \\ 0.342747 & 0.565002 \end{pmatrix}, \quad U_{21} = \begin{pmatrix} 0.912476 & -0.387553 \\ 0.211059 & 0.720244 \end{pmatrix},$$

$$U_{12} = \begin{pmatrix} 0.387553 & -0.912476 \\ -0.720244 & -0.211059 \end{pmatrix}, \quad U_{22} = \begin{pmatrix} 0.10874 & 0.0732546 \\ 0.565602 & 0.342747 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (1.2.19), находим

$$P = \begin{pmatrix} 157.425 & -30.9839 \\ -30.9839 & 7.23792 \end{pmatrix}.$$

Оптимальное стабилизирующее управление дискретной задачи (1.1.19), (1.1.20) имеет вид

$$\tilde{u}_n^0 = (-3.15098 \ 0.51808) y_n, \quad n \geq 0.$$

Применяя преобразование обратное (1.1.21), восстановим управление, стабилизирующее исходную задачу

$$u^0(t, x(\cdot)) = (-3.30438 \ 0.13597) x([t]).$$

Значение показателя качества для решения с начальным значением $x(0) = (15 \ 7)^T$ и оптимальным управлением $J^0 = 29268.7$.

Метод приведения к устойчивой форме Шура для решения задач оптимальной стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений (1.1.1) с критерием качества (1.1.2) реализован в модуле «PCAQRAlgorithmPC.m» программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8. Время решения данного примера средствами программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8 составило 120.282с

Пример 1.6. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с кусочно-постоянными аргументами (1.2.13) с критерием качества процесса управления вида (1.1.2) и коэффициентами, заданными в примере 1.4.

Коэффициенты эквивалентной дискретной задачи (1.1.15), (1.1.17), определяемой теоремой 1.1, получены в примере 1.4. Коэффициенты задачи (1.1.19), (1.1.20), определяемые следствием 1.1 к теореме 1.1, находятся в виде

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 6.714 & 0.4359 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 6.47199 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}_y = \begin{bmatrix} 1.65253 & 1.81863 \\ 1.81863 & 2.03141 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}_u = 36.4384. \quad (1.2.21)$$

Вычислим матрицу \mathcal{M} для дискретного уравнения Риккати (1.1.24)

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 11.5096 & 5.79262 & 0 & -2.63692 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4.17182 & -4.65993 & 0 & 2.29393 \\ 26.3572 & 29.4683 & 1 & -15.4015 \end{pmatrix}.$$

Находим верхнюю устойчивую форму Шура матрицы M

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} -0.077535 & 0.175348 & 6.84844 & 29.8294 \\ 0 & 0.111464 & -4.53296 & -20.0966 \\ 0 & 0 & 8.97151 & 20.2893 \\ 0 & 0 & 0 & -12.8973 \end{pmatrix}.$$

Вычислим блочные элементы матрицы унитарного преобразования U

$$U_{11} = \begin{pmatrix} -0.0331052 & 0.0465802 \\ 0.42697 & -0.253786 \end{pmatrix}, \quad U_{21} = \begin{pmatrix} 0.434276 & 0.898965 \\ 0.792468 & -0.353956 \end{pmatrix},$$

$$U_{12} = \begin{pmatrix} 0.893239 & 0.446113 \\ -0.35079 & 0.763448 \end{pmatrix}, \quad U_{22} = \begin{pmatrix} -0.0464421 & 0.0308241 \\ 0.277333 & -0.466026 \end{pmatrix}.$$

откуда

$$P = \begin{pmatrix} 43.0103 & 4.35193 \\ 4.35193 & 2.19346 \end{pmatrix}.$$

Оптимальное стабилизирующее управление дискретной задачи (1.1.19), (1.1.20) имеет вид

$$\tilde{u}_n^0 = (-1.03216 \quad -0.0660214) y_n, \quad n \geq 0.$$

Применяя преобразование обратное (1.1.21), восстановим управление, стабилизирующее исходную задачу

$$u^0(t, x(\cdot)) = -1.67648x([t]) - 0.789104x([t-1]), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Значение показателя качества для решения с начальными значениями $x(0) = (15 \ 7)^T$ и оптимальным управлением $J^0 = 10144.5$. Время решения средствами программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8 составило 2.265с.

1.2. Метод продолжения по параметру

Для задачи (1.1.19), (1.1.20) ставится вспомогательная задача оптимальной стабилизации разностного уравнения

$$y_{n+1} = (1 - \mu)(y_n + v_n) + \mu(\tilde{\mathcal{A}}y_n + \mathcal{B}\tilde{u}_n) =$$

$$= (\mu\tilde{\mathcal{A}} + (1 - \mu)I_{m(t+1)}) y_n + \mu\mathcal{B}\tilde{u}_n + (1 - \mu)v_n, \quad n \geq 0, \quad (1.2.22)$$

с критерием качества

$$J_\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((1 - \mu)(y_n^T y_n + v_n^T v_n) + \mu(y_n^T \tilde{\mathcal{D}}_y y_n + \tilde{u}_n^T \mathcal{D}_u \tilde{u}_n) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n(y_n, \tilde{u}_n, v_n, \mu), \quad \mu \in [0, 1]. \quad (1.2.23)$$

При значении параметра $\mu = 1$ эта задача совпадает с исходной задачей (1.1.19), (1.1.20), а при значении параметра $\mu = 0$ — с задачей оптимальной стабилизации векторного разностного уравнения

$$y_{n+1} = y_n + v_n, \quad n \geq 0,$$

с критерием качества

$$J_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} (y_n^T y_n + v_n^T v_n).$$

Уравнение Риккати последней задачи оптимальной стабилизации имеет вид

$$I_{m(l+1)} - P [P + I_{m(l+1)}]^{-1} P = 0,$$

а его решение $P = (1 + \sqrt{5})/2 I_{m(l+1)}$. Используя формулу (1.1.25), имеем

$$v_n^0 = v^0(y_n) = -\frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} y_n, \quad n \geq 0.$$

Для решения вспомогательной задачи (1.2.22), (1.2.23) возьмем функцию Ляпунова

$$V(y_n, \mu) = y_n^T P(\mu) y_n, \quad n \geq 0, \quad P(\mu) = P^T(\mu) > 0, \quad \mu \in [0, 1].$$

и введем функцию $G(y_n, \tilde{u}_n, v_n, \mu) = (V(y_{n+1}, \mu) - V(y_n, \mu))|_{(1.2.22)} + \omega_n(y_n, \tilde{u}_n, v_n, \mu)$, $n \geq 0$, $\mu \in [0, 1]$, где разность $(V(y_{n+1}, \mu) - V(y_n, \mu))|_{(1.2.22)}$ вычисляется вдоль решения системы (1.2.22).

Далее будем использовать следующие обозначения $\hat{A}(\mu) = \mu \tilde{A} + (1 - \mu) I_{m(l+1)}$, $\hat{B}(\mu) = \mu \tilde{B} + (1 - \mu) I_{m(l+1)}$, где $\tilde{B} = \mathcal{B} \mathcal{D}_u^{-1} \mathcal{B}^T$, $\hat{D}_y(\mu) = \mu \tilde{D}_y + (1 - \mu) I_{m(l+1)}$. С их учетом явный вид функции G определяется формулой

$$G(y_n, \tilde{u}_n, v_n, \mu) = y_n^T \hat{D}_y(\mu) y_n - y_n^T P(\mu) y_n + \tilde{u}_n^T \mathcal{D}_u \tilde{u}_n + (1 - \mu) v_n^T v_n + \\ + \left(y_n^T \hat{A}^T(\mu) + \mu \tilde{u}_n^T \mathcal{B}^T + (1 - \mu) v_n^T \right) P(\mu) \left(\hat{A}(\mu) y_n + \mu \mathcal{B} \tilde{u}_n + (1 - \mu) v_n \right),$$

где $n \geq 0$, $\mu \in [0, 1]$. Матрица $P(\mu)$ и оптимальные управления $\tilde{u}_n^0 = \tilde{u}^0(\mu, y_n)$, $v_n^0 = v^0(\mu, y_n)$ определяются системой уравнений [71]

$$G(y_n, \tilde{u}_n^0, v_n^0, \mu) = 0, \\ \frac{\partial G(y_n, \tilde{u}_n, v_n, \mu)}{\partial \tilde{u}_n} \Big|_{\substack{\tilde{u}_n = \tilde{u}_n^0 \\ v_n = v_n^0}} = 0, \\ \frac{\partial G(y_n, \tilde{u}_n, v_n, \mu)}{\partial v_n} \Big|_{\substack{\tilde{u}_n = \tilde{u}_n^0 \\ v_n = v_n^0}} = 0, \quad n \geq 0, \quad \mu \in [0, 1]. \quad (1.2.24)$$

С учетом вида функции G второе и третье уравнения (1.2.24) принимают вид

$$\mu \mathcal{B}^T P(\mu) \left(\hat{A}(\mu) y_n + (1 - \mu) v_n^0 + \mu \mathcal{B} \tilde{u}_n^0 \right) + \mu \mathcal{D}_u \tilde{u}_n^0 = 0, \quad (1.2.25)$$

$$(1 - \mu)P(\mu) \left(\hat{A}(\mu)y_n + (1 - \mu)v_n^0 + \mu\mathcal{B}\tilde{u}_n^0 \right) + (1 - \mu)v_n^0 = 0, \quad (1.2.26)$$

где $n \geq 0$, $\mu \in [0, 1]$.

Рассмотрим полученные уравнения при значениях параметра $\mu \in (0, 1)$. Разделим уравнение (1.2.25) на μ , уравнение (1.2.26) на $1 - \mu$, после чего вычтем из преобразованного уравнения (1.2.25) преобразованное уравнение (1.2.26), умноженное на \mathcal{B}^T слева. Получим уравнение $\mathcal{D}_u \tilde{u}_n^0 - \mathcal{B}^T v_n^0 = 0$, $n \geq 0$, $\mu \in (0, 1)$. Откуда находим зависимость

$$\tilde{u}_n^0 = \mathcal{D}_u^{-1} \mathcal{B}^T v_n^0, \quad n \geq 0, \quad \mu \in (0, 1). \quad (1.2.27)$$

Подстановка этой зависимости в преобразованное уравнение (1.2.25) дает уравнение

$$P(\mu) \left(\hat{A}(\mu)y_n + \hat{B}(\mu)v_n^0 \right) + v_n^0 = 0, \quad n \geq 0, \quad \mu \in (0, 1).$$

Приведем последнее уравнение к виду

$$\left(P(\mu)\hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right) v_n^0 = -P(\mu)\hat{A}(\mu)y_n, \quad n \geq 0, \quad \mu \in (0, 1).$$

Оптимальное управление $v_n^0 = v^0(\mu, y_n)$ при $\mu \in (0, 1)$ будет определяться формулой

$$v_n^0 = - \left(P(\mu)\hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(\mu)\hat{A}(\mu)y_n, \quad n \geq 0. \quad (1.2.28)$$

Подстановка последней формулы в уравнение (1.2.27) определяет оптимальное управление $\tilde{u}_n^0 = \tilde{u}^0(\mu, y_n)$ при $\mu \in (0, 1)$. Имеем

$$\tilde{u}_n^0 = -\mathcal{D}_u^{-1} \mathcal{B}^T \left(P(\mu)\hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(\mu)\hat{A}(\mu)y_n, \quad n \geq 0. \quad (1.2.29)$$

Подставим значение $\mu = 0$ в уравнение (1.2.26) и разрешим его относительно v_n^0 . Получим значение $v_n^0(0, y_n) = - \left(P(0) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(0)y_n$, $n \geq 0$, которое позволяет сделать вывод о непрерывности функции v_n^0 по μ в точке $\mu = 0$. Аналогично можно показать, что функция (1.2.29) непрерывна по μ в точке $\mu = 1$. Для этого рассмотрим уравнение (1.2.25) при значении $\mu = 1$ и разрешим его относительно \tilde{u}_n^0 . Получим значение

$$\tilde{u}_n^0(1, y_n) = - \left(\mathcal{B}^T P(1)\mathcal{B} + \mathcal{D}_u \right)^{-1} \mathcal{B}^T P(1)\tilde{\mathcal{A}}y_n, \quad n \geq 0. \quad (1.2.30)$$

С другой стороны из равенства (1.2.29) имеем

$$\tilde{u}_n^0(1, y_n) = -\mathcal{D}_u^{-1} \mathcal{B}^T \left(P(1)\tilde{\mathcal{B}} + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(1)\tilde{\mathcal{A}}y_n, \quad n \geq 0.$$

Таким образом, для того, чтобы убедиться в непрерывности функции оптимального управления \tilde{u}_n^0 по μ в точке $\mu = 1$ необходимо установить равенство матриц $\left(\mathcal{B}^T P(1)\mathcal{B} + \mathcal{D}_u \right)^{-1} \mathcal{B}^T$ и $\mathcal{D}_u^{-1} \mathcal{B}^T \left(P(1)\tilde{\mathcal{B}} + I_{m(l+1)} \right)^{-1}$. Домножим обе эти матрицы слева на

$\mathcal{B}^T P(1)\mathcal{B} + \mathcal{D}_u$ и справа на $P(1)\tilde{\mathcal{B}} + I_{m(l+1)}$. Тогда после преобразования будем иметь тождество $\mathcal{B}^T \left(P(1)\tilde{\mathcal{B}} + I_{m(l+1)} \right) \equiv \mathcal{B}^T P(1)\mathcal{B}\mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{B}^T + \mathcal{B}^T \equiv (\mathcal{B}^T P(1)\mathcal{B} + \mathcal{D}_u) \mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{B}^T$.

Представим формулы (1.2.28), (1.2.29), доопределенные по непрерывности в точках $\mu = 0$ и $\mu = 1$ в виде

$$\begin{aligned} v_n^0 &= v^0(\mu, y_n) = K(\mu)y_n, \\ \tilde{u}_n^0 &= \tilde{u}^0(\mu, y_n) = \mathcal{D}_u^{-1}\mathcal{B}^T K(\mu)y_n, \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

где $n \geq 0$, $\mu \in [0, 1]$, матрица $K(\mu)$ определяется формулой

$$K(\mu) = - \left(P(\mu)\hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(\mu)\hat{A}(\mu), \quad \mu \in [0, 1]. \quad (1.2.32)$$

Подставляя найденные представления оптимальных управлений в первое уравнение (1.2.24), для матрицы $P(\mu)$, $\mu \in [0, 1]$ получим уравнение

$$\begin{aligned} y_n^T \left(\mu \left(\tilde{\mathcal{A}}^T + K^T(\mu)\tilde{\mathcal{B}} \right) + (1-\mu)(I_{m(l+1)} + K^T(\mu)) \right) P(\mu) \left(\mu \left(\tilde{\mathcal{A}} + \tilde{\mathcal{B}}K(\mu) \right) + (1-\mu)(I_{m(l+1)} + K(\mu)) \right) y_n + \\ + (1-\mu)y_n^T K^T(\mu)K(\mu)y_n + \mu y_n^T K^T(\mu)\tilde{\mathcal{B}}K(\mu)y_n + y_n^T \left(\mu \tilde{\mathcal{D}}_y + (1-\mu)I_{m(l+1)} \right) y_n - y_n^T P(\mu)y_n = 0, \end{aligned}$$

где $n \geq 0$. С учетом обозначений, принятых ранее, это уравнение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} y_n^T \left(\hat{A}^T(\mu) + K^T(\mu)\hat{B}(\mu) \right) P(\mu) \left(\hat{A}(\mu) + \hat{B}(\mu)K(\mu) \right) y_n + y_n^T \hat{D}_y(\mu) y_n + \\ + y_n^T K^T(\mu)\hat{B}(\mu)K(\mu)y_n - y_n^T P(\mu)y_n = 0, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Так как данное скалярное уравнение справедливо для любых значений $y_n \in \mathbb{R}^{m(l+1)}$, $n \geq 0$, то оно эквивалентно матричному уравнению

$$\left(\hat{A}^T(\mu) + K^T(\mu)\hat{B}(\mu) \right) P(\mu) \left(\hat{A}(\mu) + \hat{B}(\mu)K(\mu) \right) + \hat{D}_y(\mu) + K^T(\mu)\hat{B}(\mu)K(\mu) - P(\mu) = 0 \quad (1.2.33)$$

которое определяет неизвестную положительно определенную матрицу $P(\mu)$, $\mu \in [0, 1]$.

Используя определение матрицы $K(\mu)$ (1.2.32) в преобразованном уравнении (1.2.33), получим уравнение

$$\begin{aligned} F(\mu, P(\mu)) &= \hat{A}^T(\mu)P(\mu)\hat{A}(\mu) - P(\mu) + \hat{D}_y(\mu) - \\ &- \hat{A}^T(\mu)P(\mu)\hat{B}(\mu) \left(P(\mu)\hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(\mu)\hat{A}(\mu) = 0. \end{aligned} \quad (1.2.34)$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1.5. *Оптимальное управление вспомогательной задачи (1.2.22), (1.2.23) при $\mu \in (0, 1]$ определяется формулой (1.2.29), где матрица $P(\mu)$, $\mu \in (0, 1]$, является решением матричного уравнения (1.2.34).*

Используя подход, изложенный в работах [35, 50, 51, 64], задачу решения нелинейного уравнения заменим задачей интегрирования матричного обыкновенного дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной. С этой целью продифференцируем уравнение (1.2.34) по параметру μ на интервале $(0, 1)$, получим уравнение

$$F'_\mu(\mu, P(\mu)) + F'_P(\mu, P(\mu))(P'(\mu)) = 0, \quad (1.2.35)$$

где

$$\begin{aligned} F'_\mu(\mu, P(\mu)) = & \left(\tilde{\mathcal{A}}^T - I_{m(l+1)} \right) P(\mu) \hat{A}(\mu) + \hat{A}^T(\mu) P \left(\tilde{\mathcal{A}} - I_{m(l+1)} \right) + \tilde{\mathcal{D}}_y - I_{m(l+1)} - \\ & - \left(\tilde{\mathcal{A}}^T - I_{m(l+1)} \right) P(\mu) \hat{B}(\mu) \left(P(\mu) \hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(\mu) \hat{A}(\mu) - \\ & - \hat{A}^T(\mu) P(\mu) \left(\tilde{\mathcal{B}} - I_{m(l+1)} \right) \left(P(\mu) \hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(\mu) \hat{A}(\mu) - \\ & - \hat{A}^T(\mu) P(\mu) \hat{B}(\mu) \left(P(\mu) \hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(\mu) \left(\tilde{\mathcal{A}} - I_{m(l+1)} \right) + \\ & + \hat{A}^T(\mu) P(\mu) \hat{B}(\mu) \left(P(\mu) \hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(\mu) \left(\tilde{\mathcal{B}} - I_{m(l+1)} \right) \left(P(\mu) \hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(\mu) \hat{A}(\mu), \end{aligned}$$

$F'_P(\mu, P(\mu))(X)$ — значение производной Фреше на матричном элементе X [69, с.636], определяемое формулой

$$\begin{aligned} F'_P(\mu, P(\mu))(X) = & \hat{A}^T(\mu) X \hat{A}(\mu) - X - \hat{A}^T(\mu) X \hat{B}(\mu) \left(P(\mu) \hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(\mu) \hat{A}(\mu) + \\ & + \hat{A}^T(\mu) P(\mu) \hat{B}(\mu) \left(P(\mu) \hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} X \hat{B}(\mu) \left(P(\mu) \hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} P(\mu) \hat{A}(\mu) - \\ & - \hat{A}^T(\mu) P(\mu) \hat{B}(\mu) \left(P(\mu) \hat{B}(\mu) + I_{m(l+1)} \right)^{-1} X \hat{A}(\mu). \end{aligned}$$

При $\mu = 0$ уравнение (1.2.34) может быть разрешено, и значение $P(0)$ находится в виде диагональной матрицы с элементами главной диагонали равными $(1 + \sqrt{5})/2$.

Следствие 1.2. *Оптимальное управление вспомогательной задачи (1.2.22), (1.2.23) при $\mu \in (0, 1]$ определяется формулой (1.2.29), где матрица $P(\mu)$, $\mu \in (0, 1]$, является решением задачи Коши для матричного дифференциального уравнения (1.2.35) с начальным условием $P(0) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} I_{m(l+1)}$.*

Введем разбиение отрезка $[0, 1]$ $0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_i < \dots < \mu_{N-1} < \mu_N = 1$, $\mu_i - \mu_{i-1} = \bar{\mu}$, $\bar{\mu} = 1/N$.

Полученную задачу Коши для матричного обыкновенного дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, будем решать численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом $\bar{\mu}$ [17, 18]. На каждом шаге требуется

решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} F'_\mu(\mu_i, P(\mu_i)) + F'_P(\mu_i, P(\mu_i))(P_1) &= 0, \\ F'_\mu\left(\mu_i + \frac{\bar{\mu}}{2}, P(\mu_i) + \frac{\bar{\mu}}{2}P_1\right) + F'_P\left(\mu_i + \frac{\bar{\mu}}{2}, P(\mu_i) + \frac{\bar{\mu}}{2}P_1\right)(P_2) &= 0, \\ F'_\mu\left(\mu_i + \frac{\bar{\mu}}{2}, P(\mu_i) + \frac{\bar{\mu}}{2}P_2\right) + F'_P\left(\mu_i + \frac{\bar{\mu}}{2}, P(\mu_i) + \frac{\bar{\mu}}{2}P_2\right)(P_3) &= 0, \\ F'_\mu(\mu_i + \bar{\mu}, P(\mu_i) + \bar{\mu}P_3) + F'_P(\mu_i + \bar{\mu}, P(\mu_i) + \bar{\mu}P_3)(P_4) &= 0 \end{aligned}$$

относительно неизвестных матричных коэффициентов P_1, P_2, P_3, P_4 . После их определения приближенное значение матрицы P в точке μ_{i+1} определяется как $P(\mu_{i+1}) = (P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4)/6$. Невязкой полученного численного решения $P(\mu_i)$ в точке разбиения μ_i назовем величину $|F(\mu_i, P(\mu_i))|$, $\mu_i = i\bar{\mu}$, $0 \leq i \leq N$.

Пример 1.7. Рассмотрим управляемое движение для объекта с кусочно-постоянным аргументом, описываемое дифференциальным уравнением (1.2.9), с критерием качества вида (1.1.2), матричные коэффициенты которого задаются (1.2.10).

Коэффициенты эквивалентной дискретной задачи (1.1.19), (1.1.20) определены в примере 1.5 в виде (1.2.20).

В используемом методе шаг интегрирования полагался равным 0.0001. Вычисленная матрица $P(1)$ имеет значение

$$P(1) = \begin{pmatrix} 157.098 & -30.9318 \\ -30.9318 & 7.22093 \end{pmatrix}.$$

Невязка решения при $\mu = 1$ составила 0.071499. Оптимальное стабилизирующее управление для эквивалентной дискретной задачи находится по формуле (1.2.29) в виде

$$\tilde{u}^0(1, y_n) = (-3.13703 \ 0.519722) y_n.$$

Используя связь оптимальных стабилизирующих управлений для задач (1.1.19), (1.1.20) и (1.1.1), (1.1.2), находим зависимость

$$u^0(t, x(\cdot)) = (-3.30405 \ 0.135729) x([t]), t \in \mathbb{R}^+.$$

Значение показателя качества для решения с начальным значением $x(0) = (15 \ 7)^T$ и оптимальным управлением $J^0 = 29268.7$.

Метод продолжения по параметру, использующий следствие 1.2 и численный метод Рунге-Кутты 4-го порядка решения матричного дифференциального уравнения (1.2.35), реализован в модуле «PCANomotopyMethodPC.m» программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8. Время решения данного примера средствами программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8 составило 3.10524 минуты.

Форму уравнения (1.2.34) можно упростить, если заменить задачу нахождения матрицы $P(\mu)$, $\mu \in [0, 1]$, задачей нахождения матрицы $K(\mu)$, $\mu \in [0, 1]$, используя формулу

$$P(\mu) = -K(\mu) \left(\hat{A}(\mu) + \hat{B}(\mu)K(\mu) \right)^{-1}. \quad (1.2.36)$$

Подстановкой данной формулы в матричное уравнение (1.2.33), преобразуем его к виду

$$-\left(\hat{A}^T(\mu) + K^T(\mu)\hat{B}(\mu) \right) K(\mu) + \hat{D}_y(\mu) + K^T(\mu)\hat{B}(\mu)K(\mu) + K(\mu) \left(\hat{A}(\mu) + \hat{B}(\mu)K(\mu) \right)^{-1} = 0$$

После домножения на матрицу $\left(\hat{A}(\mu) + \hat{B}(\mu)K(\mu) \right)$ справа и приведения подобных это уравнение примет вид

$$\tilde{F}(\mu, K(\mu)) = \left(\hat{D}_y(\mu) - \hat{A}^T(\mu)K(\mu) \right) \left(\hat{A}(\mu) + \hat{B}(\mu)K(\mu) \right) + K(\mu) = 0. \quad (1.2.37)$$

Теорема 1.6. *Оптимальное управление вспомогательной задачи (1.2.22), (1.2.23) при $\mu \in (0, 1]$ определяется формулой (1.2.31), где матрица $K(\mu)$, $\mu \in (0, 1]$, является решением матричного уравнения (1.2.37), для которого матрица $P(\mu)$, $\mu \in [0, 1]$, задаваемая формулой (1.2.36), положительно определена.*

Задачу решения уравнения (1.2.37) заменим задачей интегрирования матричного обыкновенного дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной. Для этого, как и ранее, продифференцируем уравнение (1.2.37) по параметру μ на интервале $(0, 1)$, получим уравнение

$$\tilde{F}'_{\mu}(\mu, K(\mu)) + \tilde{F}'_K(\mu, K(\mu)) (K'(\mu)) = 0, \quad (1.2.38)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}'_{\mu}(\mu, K(\mu)) = & \left(\tilde{\mathcal{D}}_y(\mu) - I_{m(l+1)} - \left(\tilde{\mathcal{A}}^T(\mu) - I_{m(l+1)} \right) K(\mu) \right) \left(\hat{A}(\mu) + \hat{B}(\mu)K(\mu) \right) + \\ & \left(\hat{D}_y(\mu) - \hat{A}^T(\mu)K(\mu) \right) \left(\tilde{\mathcal{A}}(\mu) - I_{m(l+1)} + \left(\tilde{\mathcal{B}}^T(\mu) - I_{m(l+1)} \right) K(\mu) \right), \end{aligned}$$

$\tilde{F}'_K(\mu, K(\mu))(X)$ — производная Фреше, определяемая формулой

$$\tilde{F}'_K(\mu, K(\mu))(X) = \hat{A}^T(\mu)X\hat{A}(\mu) + \hat{A}^T(\mu)X\hat{B}(\mu)K(\mu) + \hat{D}_y(\mu)\hat{B}(\mu)X - \hat{A}^T(\mu)K(\mu)\hat{B}(\mu)X + X.$$

В точке $\mu = 0$ матрица K принимает значение $K(0)$, определяемое диагональной матрицей со значениями диагональных элементов равными $-(1 + \sqrt{5}) / (3 + \sqrt{5})$.

Следствие 1.3. *Оптимальное управление вспомогательной задачи (1.2.22), (1.2.23) при $\mu \in (0, 1]$ определяется формулой (1.2.29), где матрица $K(\mu)$, $\mu \in (0, 1]$, является решением задачи Коши для матричного дифференциального уравнения (1.2.38) с начальным условием $K(0) = -\frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}I_{m(l+1)}$, для которого матрица $P(\mu)$, $\mu \in [0, 1]$, задаваемая формулой (1.2.36), положительно определена.*

Введем разбиение отрезка $[0, 1]$ $0 < \mu_1 < \dots < \mu_i < \dots < \mu_{N-1} < 1$, $\mu_i - \mu_{i-1} = \bar{\mu}$, $\bar{\mu} = 1/N$.

На выбранном выше разбиении отрезка $[0, 1]$ будем интегрировать уравнение (1.2.38) методом Эйлера. Разностная схема, применяемая для решения задачи Коши, задается формулой

$$\tilde{F}'_K(\mu_i, K(\mu_i))(K(\mu_{i+1})) = \tilde{F}'_K(\mu_i, K(\mu_i))(K(\mu_i)) - \bar{\mu} \tilde{F}'_\mu(\mu_i, K(\mu_i)),$$

где $0 \leq i \leq N - 1$, $\bar{\mu} = 1/N$. Это матричное уравнение является линейным относительно неизвестной матрицы $K(\mu_{i+1})$.

Точность решения уравнения (1.2.37) можно повысить, если найденное значение матрицы $K(\mu_{i+1})$ принять за начальное приближение $K^0(\mu_{i+1})$ в методе Ньютона для решения системы нелинейных уравнений (1.2.37). Итерационный процесс метода Ньютона организуется в соответствии с формулой

$$K^{j+1}(\mu_{i+1}) = K^j(\mu_{i+1}) - \left(\tilde{F}'_K(\mu_{i+1}, K^j(\mu_{i+1})) \right)^{-1} \left(\tilde{F}(\mu_{i+1}, K^j(\mu_{i+1})) \right), \quad j \geq 0.$$

Условие выхода из итерационного процесса задается требованиями к точности решения.

Пример 1.8. Решение задачи оптимальной стабилизации для системы, описанной в приведенном выше примере 1.7 с помощью данного алгоритма осуществлялось с шагом $\bar{\mu} = 0.005$. Оптимальное стабилизирующее управление для эквивалентной дискретной задачи имеет вид $\tilde{u}^0(1, y_n) = (-3.13911 \ 0.520165) y_n$. Оптимальное стабилизирующее управление для исходной задачи имеет вид $u^0(x([t])) = (-3.30613 \ 0.136173) x([t])$. Невязка решения при $\mu = 1$ составила 5.56213×10^{-13} . Значение показателя качества для решения с начальным значением $x(0) = (15 \ 7)^T$ и оптимальным управлением $J^0 = 29377.6$.

Метод продолжения по параметру, использующий следствие 1.3 и численный метод Эйлера, а также теорему 1.6 и метод Ньютона, реализован в модуле «PCANomotopyMethodPC.m» программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8.

Отметим, что численное решение поставленной задачи данной реализацией метода продолжения по параметру средствами программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8 получено за 12.266 секунды против 3.10524 минуты для реализации метода продолжения по параметру, использующего следствие 1.2 и численный метод Рунге-Кутты 4-го порядка решения матричного дифференциального уравнения (1.2.35).

Пример 1.9. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с кусочно-постоянными аргументами (1.2.13) примера 1.4. Матричные коэффициенты критерия качества процесса управления вида (1.1.2) определены там же.

Коэффициенты эквивалентной дискретной задачи (1.1.19), (1.1.20) определены в примере 1.6 в виде (1.2.21).

В используемом методе шаг интегрирования полагался равным 0.02. Вычисленная матрица $K(1)$ имеет значение

$$K(1) = \begin{pmatrix} -5.66951 & -0.311679 \\ -2.05927 & -0.02785 \end{pmatrix},$$

а соответствующая ей матрица $P(1)$ —

$$P(1) = \begin{pmatrix} 41.2376 & 3.68483 \\ 3.68483 & 1.88193 \end{pmatrix}.$$

Невязка решения при $\mu = 1$ составила 5.68712×10^{-14} . Оптимальное стабилизирующее управление для эквивалентной дискретной задачи находится по формуле (1.2.29) в виде

$$\tilde{u}^0(1, y_n) = (-1.021 \quad -0.0561289) y_n.$$

Используя связь оптимальных стабилизирующих управлений для задач (1.1.19), (1.1.20) и (1.1.1), (1.1.2), находим стабилизирующее управление исходной задачи

$$u^0(x([t])) = -1.67429x([t]) - 0.789271x([t-1]).$$

Невязка решения при $\mu = 1$ составила 5.68712×10^{-14} . Значение показателя качества для решения с начальным значением $x(0) = (15 \ 7)^T$ и оптимальным управлением $J^0 = 10144.5$. Время решения задачи средствами программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8 составило 2.5 с.

1.2. Метод факторизации характеристического уравнения в случае скалярного управления

В случае скалярного управления ранее предлагались процедуры построения оптимального стабилизирующего управления для обыкновенных дифференциальных уравнений [38, 94], уравнений с дискретным временем [71] и дифференциальных уравнений с запаздываниями [110].

Пусть $u \in \mathbb{R}$, \tilde{u}_n^0 , $n \geq 0$, — оптимальное управление задачи оптимальной стабилизации (1.1.19), (1.1.20), а y_n^0 , $n \geq 0$, — соответствующее ему решение системы (1.1.19). Рассмотрим их возмущения $\tilde{u}_n = \tilde{u}_n^0 + \bar{u}_n$, $y_n = y_n^0 + \bar{y}_n$, $n \geq 0$, где $\bar{y}_0 = 0$, $\bar{u}_0 = 0$. Тогда имеем

$$\bar{y}_{n+1} = \tilde{\mathcal{A}}\bar{y}_n + \mathcal{B}\bar{u}_n, \quad n \geq 0. \quad (1.2.39)$$

При нахождении оптимального управления используется вариационный метод [106]. Равенство нулю первой вариации критерия качества дает нам

$$\bar{J} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(y_n^{0T} \tilde{\mathcal{D}}_y \bar{y}_n + \mathcal{D}_u \tilde{u}_n^0 \bar{u}_n \right) = 0. \quad (1.2.40)$$

Из (1.2.39) находим $\bar{y}_1 = 0$, $\bar{y}_{n+1} = \sum_{k=1}^n \tilde{\mathcal{A}}^{n-k} \mathcal{B} \bar{u}_k$, $n \geq 1$. Тогда первая вариация критерия качества (1.2.40) преобразуется к виду

$$\bar{J} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k+1}^{+\infty} y_n^{0T} \tilde{\mathcal{D}}_y \tilde{\mathcal{A}}^{n-k-1} \mathcal{B} + \mathcal{D}_u \tilde{u}_k^0 \right) \bar{u}_k = 0.$$

В результате из равенства нулю первой вариации следует, что

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} \mathcal{B}^T \tilde{\mathcal{A}}^{n-k-1T} \tilde{\mathcal{D}}_y y_n^0 + \mathcal{D}_u \tilde{u}_k^0 = 0, \quad k \geq 1.$$

Откуда находим

$$\tilde{u}_k^0 = -\mathcal{D}_u^{-1} \mathcal{B}^T \sum_{n=k+1}^{+\infty} \tilde{\mathcal{A}}^{n-k-1T} \tilde{\mathcal{D}}_y y_n^0, \quad k \geq 1.$$

Введем вспомогательную функцию дискретного аргумента

$$z_k^0 = \sum_{n=k+1}^{+\infty} \tilde{\mathcal{A}}^{n-k-1T} \tilde{\mathcal{D}}_y y_n^0, \quad k \geq 1.$$

Она удовлетворяет условию

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} z_k^0 = 0. \quad (1.2.41)$$

Тогда, имеем

$$\tilde{u}_k^0 = -\mathcal{D}_u^{-1} \mathcal{B}^T z_k^0, \quad k \geq 1. \quad (1.2.42)$$

Из определения дискретной функции z_k^0 , $k \geq 1$, следует, что она удовлетворяет уравнению

$$z_{k-1}^0 = \tilde{\mathcal{D}}_y y_k^0 + \tilde{\mathcal{A}}^T z_k^0, \quad k \geq 2.$$

Таким образом, оптимальное стабилизирующее управление \tilde{u}_k^0 , $k \geq 1$, определяется формулой (1.2.42), в которой дискретная функция z_k^0 , $k \geq 1$, удовлетворяющая условию (1.2.41), является компонентой решения системы разностных уравнений

$$\begin{aligned} y_{k+1}^0 &= \tilde{\mathcal{A}} y_k^0 - \mathcal{B} \tilde{\mathcal{D}}_u^{-1} \mathcal{B}^T z_k^0, \quad k \geq 0, \\ z_{k-1}^0 &= \tilde{\mathcal{D}}_y y_k^0 + \tilde{\mathcal{A}}^T z_k^0, \quad k \geq 2, \end{aligned} \quad (1.2.43)$$

где y_k^0 , $k \geq 0$, - оптимальное решение дискретного уравнения (1.1.19).

Требуется найти оптимальное управление в форме обратной связи $u_n^0 = \sum_{j=1}^{m(l+1)} K_j y_n^j = K^T y_n$, $K \in \mathbb{R}^{m(l+1)}$. Для решения этой задачи воспользуемся методом факторизации характеристического полинома системы (1.2.43)

$$\chi(\lambda) = \lambda^{m(l+1)} \det \begin{pmatrix} \lambda I_{m(l+1)} - \tilde{A} & \mathcal{B} \mathcal{D}_u^{-1} \mathcal{B}^T \\ -\tilde{\mathcal{D}}_y & \lambda^{-1} I_{m(l+1)} - \tilde{A}^T \end{pmatrix}. \quad (1.2.44)$$

Если полином $\chi(\lambda)$ имеет корень λ ($|\lambda| < 1$), то он также имеет корень λ^{-1} ($|\lambda^{-1}| > 1$).

Представим характеристический полином (1.2.44) в виде произведения двух полиномов

$$\chi(\lambda) = \chi_1(\lambda) \chi_2(\lambda), \quad \chi_1(\lambda) = \sum_{i=0}^{m(l+1)} b_i \lambda^{m(l+1)-i}, \quad b_0 = 1,$$

в котором все корни полинома $\chi_1(\lambda)$ имеют корни, по модулю меньшие единицы, а все корни полинома $\chi_2(\lambda)$ имеют корни, по модулю большие единицы.

Метод факторизации для дискретных систем в задаче оптимальной стабилизации требует, чтобы $\chi_1(\lambda) = d(\lambda, K)$, где $d(\lambda, K)$ — характеристический полином системы (1.1.19), в которую подставлено управление в форме обратной связи $u_n = K y_n$ [99]. Находим $d(\lambda, K) = \det(\lambda I_{m(l+1)} - \tilde{A} - \mathcal{B}K) = \sum_{i=0}^{m(l+1)} a_i(K) \lambda^{m(l+1)-i}$, $a_0(K) \equiv 1$. Здесь коэффициенты $a_i(K)$, $i = 1, \dots, m(l+1)$, полинома $d(\lambda, K)$ линейно зависят от K , т.е. $a_i(K) = \sum_{j=1}^{m(l+1)} \alpha_{ij} K_j$, $i = 1, \dots, m(l+1)$, причем $\det \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{m(l+1)} \neq 0$ [39].

Таким образом, для решения задачи оптимальной стабилизации (1.1.19), (1.1.20) требуется найти нули функции (1.2.44) λ_i , $i = 1, \dots, m(l+1)$, имеющие модули меньше единицы; определить по формулам Виета коэффициенты b_i , $i = 1, \dots, m(l+1)$, полинома $\chi_1(\lambda)$

$$b_1 = - \sum_{i=1}^{m(l+1)} \lambda_i, \quad b_2 = - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{m(l+1)} \lambda_i \lambda_j, \quad \dots, \quad b_{m(l+1)} = (-1)^{m(l+1)} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{m(l+1)};$$

записать систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{m(l+1)} \alpha_{ij} K_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m(l+1), \quad (1.2.45)$$

отражающих совпадение коэффициентов полиномов $d(\lambda, K)$ и $\chi_1(\lambda)$.

Искомые коэффициенты управления по принципу обратной связи определяются решением линейной системы алгебраических уравнений (1.2.45) в виде $K = \Lambda^{-1} \beta$, где $\Lambda = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{m(l+1)}$, $\beta = (b_1 \dots b_{m(l+1)})^T$. Таким образом, находим оптимальное стабилизирующее управление эквивалентной дискретной задачи (1.1.19), (1.1.20) в виде $u_n^0 = \Lambda^{-1} \beta y_n$. Стабилизирующее управление исходной (непрерывной) задачи получим применением методов параграфа 1.2 в форме $u^0 = K (x^T([t]) \quad x^T([t-1]) \quad \dots \quad x^T([t-l]))^T$.

Пример 1.10. Рассмотрим управляемый объект, описываемый скалярным дифференциальным уравнением с кусочно-постоянными аргументами (1.2.13).

Эквивалентная задача оптимальной стабилизации дискретного уравнения (1.1.19) с критерием качества процесса управления (1.1.20) описана в примере 1.6 параграфа 1.5.

Составим характеристическое уравнение системы (1.2.43)

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \lambda^2 \det \begin{pmatrix} -6.65601 + \lambda & -0.370824 & 1.16551 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ -1.44206 & -1.58244 & -6.65601 + 1/\lambda & -1 \\ -1.58244 & -1.76635 & -0.370824 & 1/\lambda \end{pmatrix} = \\ &= 49.1794\lambda^2 - 0.370824 - 2.34345\lambda - 2.34345\lambda^3 - 0.370824\lambda^4 = 0. \end{aligned}$$

Находим корни $\lambda_1 = -0.0661425$ и $\lambda_2 = 0.11427$ и соответствующие им коэффициенты полинома $\chi_1(\lambda)$ $b_1 = 0.0481275$, $b_2 = -0.0075581$. С другой стороны, для системы (1.1.19) имеем характеристическое уравнение

$$d(\lambda, K) = -0.4359 - 6.47199K_2 - (6.714 + 6.47199K_1)\lambda + \lambda^2 = 0,$$

где $K = (K_1 \ K_2)^T$. Выпишем систему линейных уравнений (1.2.45)

$$-0.4359 - 6.47199K_2 = 0.0481275, \quad -6.714 - 6.47199K_1 = -0.0075581.$$

Находим элементы коэффициента усиления для задачи оптимальной стабилизации (1.1.19), (1.1.20) $K_1 = -1.021$, $K_2 = -0.0561289$. Стабилизирующее управление в исходной задаче определяется формулой

$$u^0(t, x(\cdot)) = -1.67429x([t]) - 0.789271x([t-1]).$$

Метод факторизации характеристического уравнения для решения задач оптимальной стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений (1.1.1) с критерием качества (1.1.2) реализован в модуле «PCAFactorizationMethodPC.m» программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8. Время решения данного примера средствами программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8 составило 2.281с.

§1.3. Стабилизация решений нелинейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

В настоящем параграфе предложен метод построения асимптотических стабилизирующих управлений для систем нелинейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами. Метод построения стабилизирующих управлений в виде степенных рядов для систем обыкновенных дифференциальных уравнений использовался в работе [38], а для систем с постоянными запаздываниями — в работе [34].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t), x([t]), x([t-1]), \dots, x([t-l]), u), \quad (1.3.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$ и выполнены условия

F — непрерывная вектор-функция в некоторой области $\mathbb{R} \times D$;

(B) голоморфная по всем аргументам, кроме первого, в области D ;

периодическая по первому аргументу, с периодом 1; $F(t, 0, \dots, 0) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Здесь $[a]$ — целая часть числа a , l — натуральное число, D — область пространства $\mathbb{R}^{m(l+1)+r}$, содержащая точку с нулевыми координатами.

Ставится задача оптимальной стабилизации нулевого решения системы (1.3.1) с критерием качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} \omega(t, x(t), u(t)) dt, \quad (1.3.2)$$

для которого выполнены условия

ω — неотрицательная функция, непрерывная в некоторой области $\mathbb{R} \times D'$;

(C) положительно определенная, голоморфная по x и u в области D' ;

периодическая по первому аргументу, с периодом 1; $\omega(t, 0, 0) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Здесь D' — область пространства \mathbb{R}^{m+r} , содержащая точку с нулевыми координатами.

Множество допустимых управлений U состоит из кусочно-постоянных функций

$$u(t) = u_n, \quad n \leq t < n+1, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (1.3.3)$$

Значения управления формируются по принципу обратной связи.

Задачи оптимальной стабилизации для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений решались в работах [38, 48], для систем с постоянным запаздыванием — в работе [34], а для систем разностных уравнений — в работах [100, 101].

На полуинтервале $n \leq t < n + 1$ уравнение (1.3.1) преобразуется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x, x_n, \dots, x_{n-l}, u_n), \quad n \leq t < n + 1. \quad (1.3.4)$$

Здесь $x_k = x(k)$, $k \geq -l$. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (1.3.4) с начальным условием $x(n) = x_n$, $n \geq 0$, имеет единственное решение. Предполагаем, что это решение продолжимо на отрезок $[n, n + 1]$. Оно непрерывно зависит от начальных условий, параметров и определяется формулой

$$x(t) = \Phi(t, n, x_n, \dots, x_{n-l}, u_n), \quad n \leq t \leq n + 1, \quad n \geq 0. \quad (1.3.5)$$

Уравнение (1.3.5) инвариантно относительно сдвига времени t на 1. Тогда имеем

$$x(t) = \Phi(t - n, 0, x_n, \dots, x_{n-l}, u_n), \quad n \leq t \leq n + 1, \quad n \geq 0.$$

Полагая $t = n + 1$, получим разностное уравнение

$$x_{n+1} = \Phi(1, 0, x_n, \dots, x_{n-l}, u_n), \quad n \geq 0. \quad (1.3.6)$$

Используя формулу (1.3.5), преобразуем критерий качества (1.3.2)

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} \omega(t, x(t), u_n) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} \omega(t, \Phi(t - n, 0, x_n, \dots, x_{n-l}, u_n), u_n) dt = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \omega(s, \Phi(s, 0, x_n, \dots, x_{n-l}, u_n), u_n) ds. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

При нахождении оптимального стабилизирующего управления для дискретной задачи удобно от системы разностных уравнений высокого порядка (1.3.6) перейти к разностной системе уравнений первого порядка большей размерности. Для этого используем замены переменных [107] $x_{n-k} = y_n^k$, $k = 0, \dots, l$, и введем в рассмотрение вектор $y_n = \{y_n^j\}_{j=0}^l$. Тогда вместо системы разностных уравнений (1.3.6) будем рассматривать систему разностных уравнений первого порядка

$$y_{n+1} = f(y_n, u_n), \quad n \geq 0, \quad (1.3.8)$$

где $f^T(y_n, u_n) = \left(\Phi^T(1, 0, y_n^0, \dots, y_n^l, u_n), y_n^{0T}, \dots, y_n^{l-1T} \right)$, $n \geq 0$, а вместо критерия качества процесса управления (1.3.7) — критерий качества вида

$$\mathcal{J} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{\omega}(y_n, u_n), \quad (1.3.9)$$

где $\tilde{\omega}(y_n, u_n) = \int_0^1 \omega(s, \Phi(s, 0, y_n^0, \dots, y_n^l, u_n), u_n) ds$, $n \geq 0$.

Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1.7. Пусть выполнены условия (B) и (C). Тогда задача оптимальной стабилизации в множестве допустимых управлений U системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.3.1) и с критерием качества процесса управления (1.3.1) эквивалентна задаче оптимальной стабилизации системы дискретных уравнений (1.3.8) с критерием качества процесса управления (1.3.9).

Для построения оптимального стабилизирующего управления используем второй метод Ляпунова. С этой целью рассмотрим систему уравнений [41, 44, 93]

$$\begin{aligned} \frac{dV(y)}{dy} \Big|_{y \rightarrow f(y,u)} \frac{\partial f(y,u)}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{\omega}(y,u)}{\partial u} &= 0, \\ V(f(y,u)) - V(y) + \tilde{\omega}(y,u) &= 0, \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

где $V(y)$ — некоторая положительно определенная функция. Функции $f(y,u)$ и $\tilde{\omega}(y,u)$ допускают представление в виде сумм рядов степенных форм относительно компонент y и u

$$f(y,u) = \sum_{k=1}^{+\infty} f^k(y,u), \quad \tilde{\omega}(y,u) = \sum_{k=2}^{+\infty} \tilde{\omega}^k(y,u),$$

где $f^k(y,u)$, $k \geq 1$, $\tilde{\omega}^k(y,u)$, $k \geq 2$, — формы k -го порядка, $\tilde{\omega}^2(y,u)$ является положительно определенной квадратичной формой. Представим форму $f^1(y,u)$ в виде $f^1(y,u) = \mathcal{A}y + \mathcal{B}u$, а форму $\tilde{\omega}^2(y,u)$ — в виде $\tilde{\omega}^2(y,u) = y^T \mathcal{D}_y y + y^T \mathcal{D}_{yu} u + u^T \mathcal{D}_{yu}^T y + u^T \mathcal{D}_u u$. Будем предполагать, что для задачи (1.1.15), (1.1.17), коэффициенты которой определяются указанными представлениями, выполнены достаточные условия (A) существования оптимального стабилизирующего управления.

Следуя подходу, изложенному в [38, 39, 66, 67], будем искать асимптотические решения системы уравнений (1.3.10)

$$u(y) = \sum_{k=1}^N u^k(y) + O(|y|^{N+1}), \quad (1.3.11)$$

$$V(y) = \sum_{k=2}^{N+1} V^k(y) + O(|y|^{N+2}), \quad (1.3.12)$$

где N — заданное натуральное число. С учетом этих представлений для форм $u^1(y)$ и $V^2(y)$ из (1.3.10) получим систему уравнений

$$\frac{dV^2(y)}{dy} \Big|_{y \rightarrow f^1(y, u^1(y))} \frac{\partial f^1(y,u)}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{\omega}^2(y,u)}{\partial u} \Big|_{u \rightarrow u^1(y)} = 0, \quad (1.3.13)$$

$$V^2(f^1(y, u^1(y))) - V^2(y) + \tilde{\omega}^2(y, u^1(y)) = 0. \quad (1.3.14)$$

Используем представление $V^2(y) = y^T P y$, $P^T = P$. Для обеспечения условия $V(y) > 0$ при $y \neq 0$ достаточно потребовать, чтобы $P > 0$.

С учетом указанных представлений уравнение (1.3.13) принимает вид

$$\left(y^T \mathcal{A}^T + u^{1T}(y) \mathcal{B}^T \right) P \mathcal{B} + y^T \mathcal{D}_{yu} + u^{1T} \mathcal{D}_u = 0,$$

и позволяет найти форму $u^1(y)$ с помощью формулы

$$u^1(y) = K^1 y, \quad (1.3.15)$$

где $K^1 = -[\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u]^{-1}(\mathcal{B}^T P \mathcal{A} + \mathcal{D}_{yu}^T)$.

Используя полученную формулу в уравнении (1.3.14), с учетом представлений форм $V^2(y)$, $f^1(y, u)$ и $\tilde{\omega}^2(y, u)$, определенных выше, будем иметь

$$y^T \left[\left(\mathcal{A}^T + K^{1T} \mathcal{B}^T \right) P \left(\mathcal{A} + \mathcal{B} K^1 \right) - P + \mathcal{D}_y + \mathcal{D}_{yu} K^1 + K^{1T} \mathcal{D}_{yu}^T + K^{1T} \mathcal{D}_u K^1 \right] y = 0.$$

Это скалярное уравнение эквивалентно матричному уравнению вида

$$\mathcal{A}^T P \mathcal{A} - P + \mathcal{D}_y + (\mathcal{A}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_{yu}) K^1 + K^{1T} (\mathcal{B}^T P \mathcal{A} + \mathcal{D}_{yu}^T) + K^{1T} (\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u) K^1 = 0.$$

С учетом определения K^1 последнее уравнение запишется в форме дискретного уравнения Риккати с неизвестной матрицей P

$$\mathcal{A}^T P \mathcal{A} - P + \mathcal{D}_y - (\mathcal{A}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_{yu}) [\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u]^{-1} (\mathcal{B}^T P \mathcal{A} + \mathcal{D}_{yu}^T) = 0. \quad (1.3.16)$$

Это матричное уравнение при выполнении условий (А) имеет единственное положительно определенное решение. Используя индукцию, предположим, что мы нашли формы $V^{i+1}(y)$ и $u^i(y)$, где $i = 1, \dots, k$, $N - 1 \geq k \geq 1$. Тогда для определения форм $V^{k+2}(y)$ и $u^{k+1}(y)$ будем иметь уравнения

$$\left. \frac{dV^{k+2}(y)}{dy} \right|_{y \rightarrow f^1(y, u^1(y))} - \left. \frac{\partial f^1(y, u)}{\partial u} \right|_{y \rightarrow \mathcal{B} u^{k+1}(y)} + \left. \frac{dV^2(y)}{dy} \right|_{y \rightarrow \mathcal{B} u^{k+1}(y)} - \left. \frac{\partial f^1(y, u)}{\partial u} \right|_{y \rightarrow \mathcal{B} u^{k+1}(y)} + 2u^{k+1}(y) \mathcal{D}_u - M^{k+1}(y) = 0, \quad (1.3.17)$$

$$V^{k+2}(f^1(y, u^1(y))) + 2y^T \mathcal{A}^T P \mathcal{B} u^{k+1}(y) - V^{k+2}(y) + 2y^T \mathcal{D}_{yu} u^{k+1}(y) - W^{k+2}(y) = 0, \quad (1.3.18)$$

где $M^{k+1T}(y)$ — известная векторная форма порядка $k+1$, $W^{k+2}(y)$ — известная скалярная форма порядка $k+2$.

С учетом обозначения $dV^{k+2}(y)/dy = V_y^{k+2}(y)$, $k \geq 1$, уравнение (1.3.17) запишется в виде

$$V_z^{k+2}((\mathcal{A} + \mathcal{B} K^1) y) \mathcal{B} + 2u^{k+1T}(\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u) - M^{k+1}(y) = 0, \quad 1 \leq k \leq N - 1,$$

Откуда форма $k+1$ -го порядка в разложении искомого управления $u(y)$ определяется формулой

$$u^{k+1}(y) = \frac{1}{2} (\mathcal{B}^T P \mathcal{B} + \mathcal{D}_u)^{-1} \left[M^{k+1T}(y) - \mathcal{B}^T V_z^{k+2T}((\mathcal{A} + \mathcal{B} K^1) y) \right], \quad 1 \leq k \leq N - 1. \quad (1.3.19)$$

Эта формула устанавливает линейную зависимость между формами $u^{k+1}(y)$ и $V^{k+2}(y)$.

Уравнение (1.3.18) приводится к виду

$$V^{k+2}(Cy) - V^{k+2}(y) + y^T K^{1T} \mathcal{B}^T V_z^{k+2T}(Cy) = \tilde{W}^{k+2}(y), \quad (1.3.20)$$

где $C = \mathcal{A} + \mathcal{B}K^1$, $\tilde{W}^{k+2}(y) = W^{k+2}(y) - y^T (\mathcal{A}^T P\mathcal{B} + \mathcal{D}_{yu}) (\mathcal{B}^T P\mathcal{B} + \mathcal{D}_u)^{-1} M^{k+1T}(y)$.

Используем специальные представления форм

$$V^{k+2}(y) = \sum_{|q|=k+2} P_q^{k+2} y^q, \quad (1.3.21)$$

$$\tilde{W}^{k+2}(y) = \sum_{|q|=k+2} \tilde{W}_q^{k+2} y^q,$$

где $q = \{q_i\}_{i=1, \dots, m(l+1)}$, $q_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = 1, \dots, m(l+1)$, $|q| = \sum_{j=1}^{m(l+1)} q_j$, $y = \{y_i\}_{i=1, \dots, m(l+1)}$, P_q^{k+2} , $1 \leq k \leq N-1$, — коэффициенты форм, вещественные числа, $y^q = \prod_{i=1}^{m(l+1)} y_i^{q_i}$.

Пусть форма $(k+2)$ -го порядка $(Cy)^q$, $|q| = k+2$, $k \geq 1$, имеет представление

$$(Cy)^q = \sum_{|d|=k+2} Q_{dq}^{k+2} y^d, \quad |q| = k+2, \quad k \geq 1.$$

Тогда будем иметь

$$V^{k+2}(Cy) = \sum_{|q|=k+2} \sum_{|d|=k+2} Q_{qd}^{k+2} P_d^{k+2} y^q, \quad k \geq 1,$$

$$V_z^{k+2}(Cy) = \left\{ \sum_{|q|=k+2} \sum_{|d|=k+2} Q_{qd}^{k+2} P_d^{k+2} q_i \left(\sum_{h=1}^{m(l+1)} C_{ih} y_h \right)^{q_i-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m(l+1)} \left(\sum_{h=1}^{m(l+1)} C_{jh} y_h \right)^{q_j} \right\}_{i=1}^{m(l+1)}, \quad k \geq 1.$$

С учетом последней формулы запишем

$$\begin{aligned} y^T K^{1T} \mathcal{B}^T V_z^{k+2}(Cy) &= \sum_{|q|=k+2} \sum_{|d|=k+2} \sum_{i=1}^{m(l+1)} \sum_{j=1}^{m(l+1)} \sum_{s=1}^{m(l+1)} K_{ij} B_{js} Q_{qd}^{k+2} P_d^{k+2} q_s \times \\ &\times y_i \left(\sum_{h=1}^{m(l+1)} C_{sh} y_h \right)^{q_s-1} \prod_{\substack{\tilde{s}=1 \\ \tilde{s} \neq s}}^{m(l+1)} \left(\sum_{h=1}^{m(l+1)} C_{\tilde{s}h} y_h \right)^{q_{\tilde{s}}} = \sum_{|q|=k+2} \sum_{|d|=k+2} R_{qd}^{k+2} P_d^{k+2} y^q, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Используя полученные представления в уравнении (1.3.20), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов P_q^{k+2} , $|q| = k+2$,

$$\sum_{|d|=k+2} (Q_{qd}^{k+2} + R_{qd}^{k+2}) P_d^{k+2} - P_q^{k+2} = \tilde{W}_q^{k+2}, \quad |q| = k+2. \quad (1.3.22)$$

Теорема 1.8. Пусть выполнены условия (A), (B), (C). Тогда в множестве допустимых управлений U задача оптимальной стабилизации нулевого решения системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.3.1) и критерием качества (1.3.2) определяется асимптотической формулой

$$u^0(t, x(\cdot)) = \sum_{k=1}^N u^k(x([t]), \dots, x([t-l])) + O\left(\left(\sum_{k=0}^l |x([t-k])|\right)^{\frac{N+1}{2}}\right), \quad t \geq 0.$$

Здесь функция u^1 определяется формулой (1.3.15), а функции u^{k+1} , $1 < k \leq N-1$ — (1.3.19), где функции V^{k+2} , $1 \leq k \leq N-1$, имеют представления (1.3.21), коэффициенты которых являются решениями систем линейных алгебраических уравнений (1.3.22).

§1.4. Стабилизация положений равновесия популяционных моделей

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{x([t])}{K}\right) x(t) - Ku, \quad t \geq 0, \quad (1.4.1)$$

где $r > 0$, $K > 0$, $[a]$ — целая часть числа a . Уравнение (1.4.1) при $\hat{u} = 0$ описывает популяционную модель Хатчинсона с кусочно-постоянным аргументом. Здесь r — параметр, характеризующий скорость роста популяции, K — равновесное значение численности популяции, управление u отражает антропогенную деятельность, направленную на регулирование численности популяции.

Вопросы качественного поведения решения этого уравнения были изучены в работах [15, 22, 25], в работе [23] исследованы вопросы устойчивости популяционной модели Хатчинсона в дискретной постановке. Вопросы, связанные с оптимальным регулированием численности популяции в модели Хатчинсона с распределенным запаздыванием, рассматривались в работе [70].

В данном примере требуется найти оптимальное управление \hat{u}^0 в классе допустимых управлений, стабилизирующее положение равновесия $x = K$ с критерием качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} \left(\left(\frac{x(t)}{K} - 1 \right)^2 + u^2(t) \right) dt.$$

Заменой переменных $x = K(y+1)$ задача оптимальной стабилизации положения равновесия $x = K$ приводятся к задаче оптимальной стабилизации (1.3.1), (1.3.2) следующего вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry([t])(y(t) - 1) + u,$$

$$J = \int_0^{+\infty} (y^2(t) + u^2(t)) dt.$$

Опишем эквивалентную задачу оптимальной стабилизации разностной системы уравнений (1.3.8) с дискретным критерием качества (1.3.9). Дифференциальное уравнение с кусочно-постоянным аргументом на полуинтервале $n \leq t < n + 1$ преобразуем к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = ry_n (y - 1) + u_n$$

с начальным условием $y(n) = y_n$, $n \geq 0$. Решение задачи Коши определяется формулой

$$y(t) = \Phi(t, n, y_n, u_n) = \left(y_n + \frac{u_n}{ry_n} - 1 \right) e^{ry_n(t-n)} - \frac{u_n}{ry_n} + 1, \quad n \leq t < n + 1.$$

Используя это решение, перейдем к эквивалентной дискретной задаче оптимальной стабилизации (1.3.8), (1.3.9), в которой

$$f(y, u) = \left(y + \frac{u}{ry} - 1 \right) e^{ry} - \frac{u}{ry} + 1,$$

$$\tilde{\omega}(y, u) = \frac{\left(y + \frac{u}{ry} - 1 \right)^2}{2ry} (e^{2ry} - 1) + \frac{2\left(1 - \frac{u}{ry} \right) \left(y + \frac{u}{ry} - 1 \right)}{ry} (e^{ry} - 1) + \left(1 - \frac{u}{ry} \right)^2 + u^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Функции $f(y, u)$ и $\tilde{\omega}(y, u)$ являются голоморфными и допускают разложения в сходящиеся степенные ряды, степенные формы которых определяются следующим образом

$$f^1(y, u) = u + (1 + r)y, \quad f^k(y, u) = \left(\frac{r^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{r^k}{k!} \right) y^k + \frac{r^{k-1}}{k!} uy^{k-1}, \quad k \geq 2,$$

$$\tilde{\omega}^2(y, u) = \frac{4}{3}u^2 + \left(1 - \frac{2}{3}r \right) uy + \left(\frac{r^2}{3} + r + 1 \right) y^2,$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}^k(y, u) &= \frac{(2^k - 2)r^{k-2}}{(k+1)!} u^2 y^{k-2} + \left(\frac{2(2^k - 2)r^{k-1}}{(k+1)!} + \frac{(2^k - 2)r^{k-2}}{k!} \right) uy^{k-1} + \\ &+ \left(\frac{(2^k - 2)r^k}{(k+1)!} + \frac{(2^k - 2)r^{k-1}}{k!} + \frac{2^{k-2}r^{k-2}}{(k-1)!} \right) y^k, \quad k \geq 3. \end{aligned}$$

Уравнение Риккати (1.3.16) линеаризованной задачи для определения коэффициента P^2 запишется в виде

$$(1+r)^2 P^2 - P^2 + \frac{r^2}{3} + r + 1 - \frac{((1+r)P^2 + 1 - 2r/3)^2}{P^2 + 4/3} = 0. \quad (1.4.2)$$

Зная положительное решение этого уравнения, можно найти значение K^1 по формуле

$$K^1 = -\frac{(1+r)P^2 + 1 - 2r/3}{P^2 + 4/3}.$$

Уравнение (1.3.19) определяет форму

$$u^2(y) = -\frac{3\left(6P_3^3(r+K^1+1)^2+2P^2(2r+2K^1+3)+r(-r+K^1+2)\right)}{4(3P^2+4)}y^2,$$

в которой P_3^3 находится из уравнения

$$\begin{aligned} & \left(2P_3^3\left(-14r^3+6(-2r^2+r+3)K^1-27r^2+3(6r+11)K^{1^2}-12r+16K^{1^3}+9\right)+\right. \\ & +P^2\left(12P_3^3\left(2r^3+6r^2+6(r+1)K^{1^2}+6(r+1)^2K^1+6r+2K^{1^3}+3\right)-r\left(33r^2+2(r-9)K^1+30r-19K^{1^2}+14\right)\right)+ \\ & \left.+12P^2r(r+K^1+1)^2+r\left(-2r^2+(3-2r)K^1+9r+4K^{1^2}-10\right)\right)/(3P^2+4)=0, \end{aligned}$$

определяемого формулой (1.3.22).

Линейные системы уравнений для определения форм u^i и коэффициентов P_{i+1}^{i+1} при $i \geq 3$ в общем случае не выписываются из-за их громоздкости.

Вычисления проводились при значениях параметров $r = 1.8$, $K = 5000$. Положительное решение уравнения Риккати (1.4.2) $P^2 = 10.292$, а коэффициент усиления $K^1 = -2.46166$. Используя определяющие линейные системы алгебраических уравнений находим коэффициенты P_{i+1}^{i+1} и формы $u^i(y)$ при $2 \leq i \leq 5$. В результате асимптотическая формула для оптимального стабилизирующего управления имеет вид

$$\begin{aligned} u^0(t, x(\cdot)) = & -2.46166y([t]) - 1.40636y^2([t]) + 0.12239y^3([t]) - 0.204444y^4([t]) + \\ & + 0.0957358y^5([t]) + O(y^6([t])), \quad y(t) = \frac{x(t)}{K} - 1, \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Поведения стабилизированного решения исходной задачи с начальным значением $x(0) = 729$, а также построенного стабилизирующего управления показано на рисунках 1.9, 1.10.

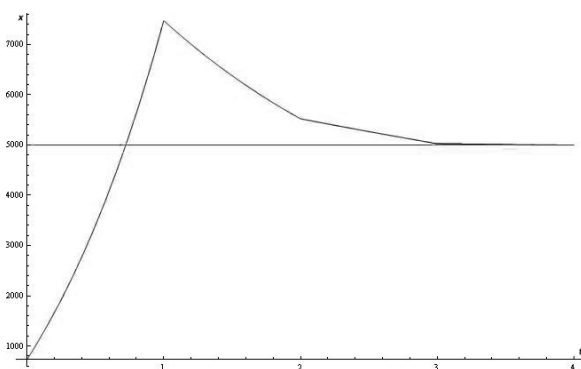


Рис. 1.9. График стабилизированного решения с начальным условием $x(0) = 729$

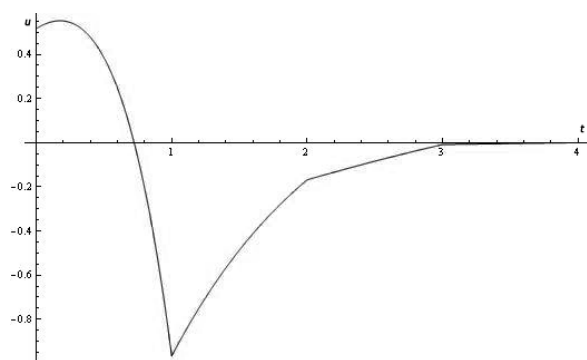


Рис. 1.10. График стабилизирующего управления

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение с кусочно-постоянным аргументом

$$\frac{dx}{dt} = (r + u) \left(1 - \frac{x([t])}{K}\right) x(t), \quad t \in [0, +\infty),$$

где $r > 0$, $K > 0$. Отличие от предыдущего примера состоит в том, что стабилизация положения равновесия $x = K$ осуществляется посредством мультипликативного управления u , регулирующего скорость роста популяции. Требуется найти оптимальное стабилизирующее управление u^0 в классе допустимых управлений (1.3.3) с критерием качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} \left(\left(\frac{x(t)}{K} - 1 \right)^2 + u^2(t) \right) dt.$$

Поставленная задача заменой переменной $x = K(y+1)$ и применением теоремы 1.7 аналогично тому, как это было сделано в предыдущем примере, сводится к задаче оптимальной стабилизации нелинейного разностного уравнения (1.3.8) с дискретным критерием качества процесса управления (1.3.9), в которых $f(y, u)$ и $\tilde{\omega}(y, u)$ определяются формулами

$$f(y, u) = e^{-(r+u)y} (y+1) - 1,$$

$$\omega(y, u) = -\frac{(y+1)^2}{2(r+u)y} (e^{-2(r+u)y} - 1) + \frac{2(y+1)}{(r+u)y} (e^{-(r+u)y} - 1) + 1 + u^2 \quad (1.4.3)$$

и являются голоморфными в точке с координатами $y = u = 0$. Их разложения в степенные ряды имеют вид

$$f(y, u) = (1 - r + u)y +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{r^{k-l}}{l!(k-l)!} + \frac{r^{k-1-l}}{l!(k-1-l)!} \right) u^l + \frac{u^k}{k!} \right) y^k,$$

$$\omega(y, u) = u^2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\sum_{l=0}^{k-2} (-1)^k \left(\frac{2^{k-2} r^{k-2-l}}{(k-1)l!(k-2-l)!} + \frac{(2-2^k) r^{k-1-l}}{kl!(k-1-l)!} - \right. \right.$$

$$\left. \frac{(2-2^k) r^{k-l}}{(k+1)l!(k-l)!} \right) u^l y^k + \frac{(-1)^k (2-2^k)}{k!} u^{k-1} y^k - \frac{(-1)^k (2-2^k) r}{(k-1)!(k+l)} u^{k-1} y^k -$$

$$\left. - \frac{(-1)^k (2-2^k)}{(k+l)!} u^k y^k \right].$$

Так как постановка линеаризованной задачи в данном случае не содержит управления, можно заключить $K^1 = 0$. Значение P^2 находим формально из уравнения (1.3.16)

$$(1-r)^2 P^2 - P^2 + 1 - r + r^2/3 = 0.$$

Имеем $P^2 = (-3 + 3r - r^2) / (3(r-2)r) > 0$ при $r < 2$.

Уравнение (1.3.19) определяет форму

$$u^2(y) = \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{3} - (r-1)P^2 \right) y^2.$$

Уравнение(1.3.22) имеет вид

$$-r + r^2 - \frac{r^3}{4} - P_3^3 + (1-r)^3 P_3^3 + 2P^2(1-r) \left(-r + \frac{r^2}{2}\right) = 0.$$

С учетом найденных значений K^1 и P^2 найдем форму u^2 и коэффициент P_3^3

$$u^2(y) = \left(\frac{1}{6} \left(-\frac{2(-r^2 + 3r - 3)}{r - 2} + \frac{2(-r^2 + 3r - 3)}{(r - 2)r} - 2r + 3 \right) \right) y^2,$$

$$P_3^3 = -\frac{r^2 + \frac{4(-r^2 + 3r - 3)r}{3(r-2)} - \frac{4(-r^2 + 3r - 3)}{r-2} + \frac{8(-r^2 + 3r - 3)}{3(r-2)r} - 4r + 4}{4(r^2 - 3r + 3)}.$$

Далее процедура построения систем линейных уравнений (1.3.19), (1.3.22) может быть продолжена для $k = 2, \dots$

Зададимся значениями $x(0) = 1500$, $r = 1$ и $K = 5000$. При этих значениях оптимальное стабилизирующее управление определяется формулой

$$u^0(t, x(\cdot)) = 0.166667y^2([t]) + 0.0416667y^3([t]) - 0.136111y^4([t]) +$$

$$+ 0.114583y^5([t]) + O(y^6([t])), \quad y(t) = \frac{x}{K} - 1, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Поведение стабилизированного решения исходной задачи с начальным значением $x(0) = 1500$, а также построенного стабилизирующего управления показаны на рисунках 1.11, 1.12.

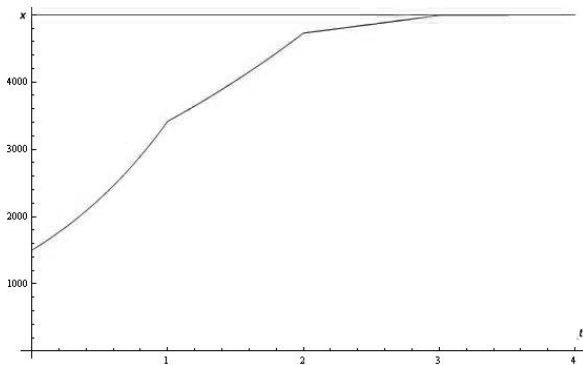


Рис. 1.11. График стабилизированного решения с начальным условием $x_0 = 1500$

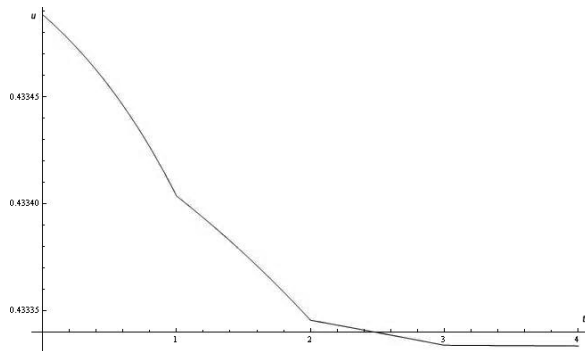


Рис. 1.12. График стабилизирующего управления

Рассмотрим управляемое движение для объекта с кусочно-постоянным аргументом, описываемое системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = r_1 \left(1 - \frac{x_2([t])}{K_2} \right) x_1(t),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -r_2 \left(1 - \frac{x_1([t])}{K_1} \right) x_2(t) + u, \quad t \geq 0. \quad (1.4.4)$$

Эта система уравнений представляет собой модифицированную модель популяционной динамики типа «хищник-жертва». Здесь x_1 отражает численность популяции «жертв», x_2 — численность популяции «хищников», r_1, r_2 — значения, характеризующие скорости воспроизведения, а K_1, K_2 — равновесные численности «жертв» и «хищников», соответственно, u отражает антропогенную деятельность, направленную на регулирование численности «хищников». Вопросы качественного поведения решений в подобных модификациях популяционной модели «хищник-жертва» были изучены в работах [21, 28, 29, 32].

Вместе с системой (1.4.4) будем рассматривать критерий качества процесса управления в виде

$$J = \int_0^{+\infty} \left(\left(\frac{x_1(t)}{K_1} - 1 \right)^2 + \left(\frac{x_2(t)}{K_2} - 1 \right)^2 + u^2(t) \right) dt.$$

Требуется найти управление, стабилизирующее решение (1.4.4), вдоль которого рассматриваемый функционал достигает минимального значения.

Сформулированная задача оптимальной стабилизации решения системы уравнений (1.4.4) заменой переменных $\tilde{x}_1(t) = x_1(t)/K_1 - 1$, $\tilde{x}_2(t) = x_2(t)/K_2 - 1$ приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}_1(t)}{dt} &= -r_1\tilde{x}_2(t)(\tilde{x}_1(t) + 1), \\ \frac{d\tilde{x}_2(t)}{dt} &= r_2\tilde{x}_1(t)(\tilde{x}_2(t) + 1) + \frac{\tilde{u}}{K_2}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

$$J = \int_0^{+\infty} (\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{u}^2) dt. \quad (1.4.6)$$

Следуя конструктивной схеме, использованной при доказательстве теоремы 1.7, преобразуем систему (1.4.5) на полуинтервале $n \leq t < n + 1$ к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{x}_1}{dt} = -r_1\tilde{x}_{2n}(\tilde{x}_1 + 1), \quad \frac{d\tilde{x}_2}{dt} = r_2\tilde{x}_{1n}(\tilde{x}_2 + 1) + \frac{\tilde{u}_n}{K_2},$$

которая может быть проинтегрирована в виде

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(t) &= (\tilde{x}_{1n} + 1) \exp \{ -r_1\tilde{x}_{2n}(t - n) \} - 1, \\ \tilde{x}_2(t) &= \left(\tilde{x}_{2n} + 1 + \frac{\tilde{u}_n}{r_2K_2\tilde{x}_{1n}} \right) \exp \{ r_2\tilde{x}_{1n}(t - n) \} - 1 - \frac{\tilde{u}_n}{r_2K_2\tilde{x}_{1n}}. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Доопределив полученное решение в точках разрыва так, чтобы обеспечить его непрерывность, получим систему разностных уравнений вида (1.3.8), которая в данном случае запишется в форме

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{1(n+1)} &= f_1(\tilde{x}_{1n}, \tilde{x}_{2n}, \tilde{u}_n) = (\tilde{x}_{1n} + 1) \exp \{ -r_1\tilde{x}_{2n} \} - 1, \\ \tilde{x}_{2(n+1)} &= f_2(\tilde{x}_{1n}, \tilde{x}_{2n}, \tilde{u}_n) = \left(\tilde{x}_{2n} + 1 + \frac{\tilde{u}_n}{r_2K_2\tilde{x}_{1n}} \right) \exp \{ r_2\tilde{x}_{1n} \} - 1 - \frac{\tilde{u}_n}{r_2K_2\tilde{x}_{1n}}. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Используя решение (1.4.7) в (1.4.6), получим

$$\mathcal{J} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} (\tilde{x}_1^2(t) + \tilde{x}_2^2(t) + \tilde{u}_n^2) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} \left([(\tilde{x}_{1n} + 1) \exp\{-r_1 \tilde{x}_{2n}(t-n)\} - 1]^2 + \right. \\ \left. + \left[\left(\tilde{x}_{2n} + 1 + \frac{\tilde{u}_n}{r_2 K_2 \tilde{x}_{1n}} \right) \exp\{r_2 \tilde{x}_{1n}(t-n)\} - 1 - \frac{\tilde{u}_n}{r_2 K_2 \tilde{x}_{1n}} \right]^2 \right) dt + \tilde{u}_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{\omega}(\tilde{x}_{1n}, \tilde{x}_{2n}, \tilde{u}_n),$$

где

$$\tilde{\omega}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}) = -\frac{(\tilde{x}_1 + 1)^2}{2r_1 \tilde{x}_2} (\exp\{-2r_1 \tilde{x}_2\} - 1) + \frac{2(\tilde{x}_1 + 1)}{r_1 \tilde{x}_2} (\exp\{-r_1 \tilde{x}_2\} - 1) + \\ + 1 + \frac{1}{2r_2 \tilde{x}_1} \left(\tilde{x}_2 + 1 + \frac{\tilde{u}}{r_2 K_2 \tilde{x}_1} \right)^2 (\exp\{2r_2 \tilde{x}_1\} - 1) + \left(1 + \frac{\tilde{u}}{r_2 K_2 \tilde{x}_1} \right)^2 - \\ - \frac{2}{r_2 \tilde{x}_1} \left(1 + \frac{\tilde{u}}{r_2 K_2 \tilde{x}_1} \right) \left(\tilde{x}_2 + 1 + \frac{\tilde{u}}{r_2 K_2 \tilde{x}_1} \right) (\exp\{r_2 \tilde{x}_1\} - 1) + \tilde{u}^2.$$

Правые части системы разностных уравнений (1.4.8), определяющей решение системы (1.4.5) в дискретные моменты времени, а также функция $\tilde{\omega}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, u)$, допускают разложение в сходящиеся степенные ряды

$$f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}) = \tilde{x}_1 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-r_1 \tilde{x}_2)^i (1 + \tilde{x}_1)}{i!}, \\ f_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(r_2 \tilde{x}_1)^i}{i!} + \sum_{i=0}^{+\infty} (r_2 \tilde{x}_1)^i \left(\frac{\tilde{x}_2}{i!} + \frac{\tilde{u}}{K_2 (i+1)!} \right), \\ \tilde{\omega}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}) = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + (r_2 - r_1) \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + r_2 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^2 - r_1 \tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2 + \frac{\tilde{u} \tilde{x}_2}{K_2} + \frac{(3K_2^2 + 1) \tilde{u}^2}{3K_2^2} + \\ + \frac{2r_2 \tilde{u} \tilde{x}_1}{3K_2} + \frac{r_2 \tilde{u} \tilde{x}_1 \tilde{x}_2}{K_2} + \frac{r_2 \tilde{u}^2 \tilde{x}_1}{4K_2^2} + \sum_{i=2}^{+\infty} \left[\left(\frac{2^i \tilde{x}_2^2}{(i+1)!} + \frac{(2^{i+1} - 2) \tilde{x}_2}{(i+1)!} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(2^{i+2} - 2) \tilde{x}_2 \tilde{u}}{K_2 (i+2)!} + \frac{(2^{i+2} - 2) \tilde{u}^2}{K_2^2 (i+3)!} + \frac{2(2^{i+1} - 2) \tilde{u}}{K_2 (i+2)!} + \frac{(2^i - 2)}{(i+1)!} \right) (r_2 \tilde{x}_1)^i + \right. \\ \left. + \left(\frac{2^i (\tilde{x}_1 + 1)^2 - 2(\tilde{x}_1 + 1)}{(i+1)!} \right) (-r_1 \tilde{x}_2)^i \right].$$

Таким образом, матричные коэффициенты линеаризованной задачи имеют вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -r_1 \\ r_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/K_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_y = \begin{pmatrix} 1 + \frac{r_2^2}{3} & \frac{r_2 - r_1}{2} \\ \frac{r_2 - r_1}{2} & 1 + \frac{r_1^2}{3} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_{yu} = \begin{pmatrix} \frac{r_2}{3K_2} \\ \frac{1}{2K_2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_u = 1 + 1/(3K_2^2).$$

Следуя предложенному методу, составим и разрешим уравнение Риккати (1.3.16) для определения оптимального стабилизирующего управления линеаризованной задачи при значениях параметров $r_1 = 1.27$, $r_2 = 0.84$, $K_1 = 6000$, $K_2 = 2800$. С учетом этих значений его единственное положительно определенное решение определяется матрицей

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1.10638 \times 10^7 & -0.70255 \times 10^7 \\ -0.70255 \times 10^7 & 2.56498 \times 10^7 \end{pmatrix}.$$

Подстановка этого решения в уравнение (1.3.15) определяет значение коэффициента в форме первого порядка разложения оптимального управления в виде $K^1 = (-1214.01 \quad -2890.5)$.

Далее будем последовательно разрешать уравнения (1.3.19), (1.3.22) для нахождения неопределенных форм $u^k(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ и коэффициентов P_p^{k+1} , где $k \geq 2$,

$$p = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \dots$$

В результате применения данной процедуры получим

$$\begin{aligned} V(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = & 1.10638 \times 10^7 \tilde{x}_1^2 - 1.4051 \times 10^7 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + 2.56498 \times 10^7 \tilde{x}_2^2 + \\ & + 4.91615 \times 10^6 \tilde{x}_1^3 - 2.3514 \times 10^7 \tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2 + 6.35204 \times 10^7 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^2 - 3.12243 \times 10^7 \tilde{x}_2^3 - \\ & - 556798 \tilde{x}_1^4 - 9.12781 \times 10^6 \tilde{x}_1^3 \tilde{x}_2 + 5.53444 \times 10^7 \tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2^2 - 7.0847 \times 10^7 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^3 + \\ & + 1.78078 \times 10^7 \tilde{x}_2^4 - 403166 \tilde{x}_1^5 + 1.78495 \times 10^6 \tilde{x}_1^4 \tilde{x}_2 + 1.52476 \times 10^7 \tilde{x}_1^3 \tilde{x}_2^2 - \\ & - 5.62551 \times 10^7 \tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2^3 + 4.9029 \times 10^7 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^4 - 1.46911 \times 10^7 \tilde{x}_2^5 + O\left((\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2)^3\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}^0(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = & -1214.01 \tilde{x}_1 - 2890.5 \tilde{x}_2 - 1014.06 \tilde{x}_1^2 - 1588.53 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + 1845.23 \tilde{x}_2^2 + \\ & + 316.8 \tilde{x}_1^3 + 665.146 \tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2 - 852.398 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^2 + 1650.32 \tilde{x}_2^3 + 29.476 \tilde{x}_1^4 - \\ & - 722.017 \tilde{x}_1^3 \tilde{x}_2 - 1084.79 \tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2^2 + 2293.9 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^3 + 680.378 \tilde{x}_2^4 + O\left((\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2)^{5/2}\right). \end{aligned}$$

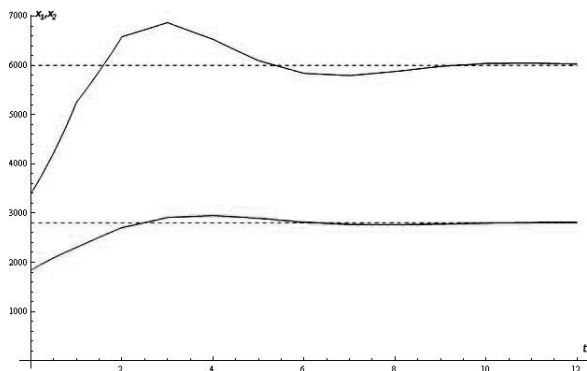


Рис. 1.13. График стабилизированного решения с начальными условиями $x_1(0) = 3400$ и $x_2(0) = 1840$: сверху — численность популяции «жертв», снизу — «хищников»

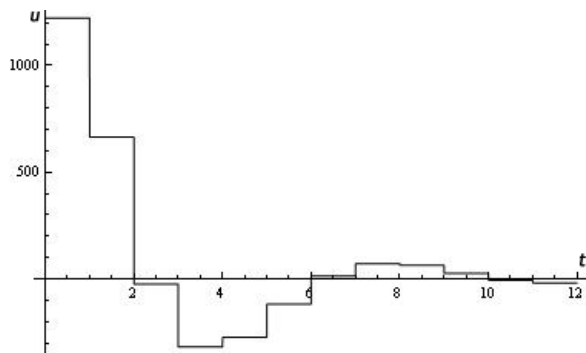


Рис. 1.14. График стабилизирующего управления

Оптимальное стабилизирующее управление для решения (1.4.4) определяется формулой

$$u^0(t, x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \tilde{u}^0\left(\frac{x_1([t])}{K_1} - 1, \frac{x_2([t])}{K_2} - 1\right), \quad t \geq 0.$$

Графики стабилизированного решения исходной задачи с начальными значениями $x_1(0) = 3400$, $x_2(0) = 1840$ и построенного стабилизирующего управления приведены на рисунках 1.13, 1.14.

ГЛАВА 2. СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

§2.1. Линейная периодическая конечномерная система дифференциальных уравнений с последействием

Рассматривается линейная периодическая неоднородная система дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^0 d\eta(t, \theta)x(t + \theta) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \quad (2.1.1)$$

где $x : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$; ω -периодическая по первому аргументу, матричная функция η при каждом фиксированном значении второго аргумента $\theta \in [-\tau, 0]$ интегрируема по Лебегу на $(0, \omega]$, а при почти каждом фиксированном значении первого аргумента $t \in (0, \omega]$ имеет ограниченную вариацию $var_{[-\tau, 0]}\eta(t, \cdot)$ интегрируемую на $(0, \omega]$, $\eta(t, 0) = 0$, $t \in (0, \omega]$; функция f — локально интегрируема на \mathbb{R}^+ .

Вводя функции $x_n(t) = x(n\omega + t)$, $t \in [-\tau, \omega]$, $f_n(t) = f(n\omega + t)$, $t \in (0, \omega]$, $n \geq 0$, от системы (3.3.1) перейдем к счетной системе дифференциальных уравнений с последействием на конечном промежутке времени

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \int_{-\tau}^0 d\eta(t, \theta)x_n(t + \theta) + f_n(t), \quad t \in (0, \omega], \quad n \geq 0. \quad (2.1.2)$$

Найдем условия, при выполнении которых непрерывный оператор $\tilde{F} : C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L((0, \omega], \mathbb{R}^m)$, определяемый формулами

$$\left(\tilde{F}x\right)(t) = \int_{-\tau}^0 d\eta(t, \theta)x(t + \theta) = \int_{t-\tau}^t d\eta(t, s-t)x(s) = \int_{-\tau}^{\omega} d\eta(t, s-t)x(s), \quad t \in (0, \omega], \quad (2.1.3)$$

является конечномерным. В последней формуле продолжение ядра Стильтеса η определяется следующим образом

$$\eta(t, \theta) = 0, \quad \text{при } 0 \leq \theta \leq \omega - t; \quad \eta(t, \theta) = \eta(t, -\tau), \quad \text{при } -\tau - t \leq \theta \leq \tau, \quad t \in (0, \omega]. \quad (2.1.4)$$

Произвольный непрерывный линейный конечномерный оператор $\tilde{F} : C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L((0, \omega], \mathbb{R}^m)$ допускает представление

$$\left(\tilde{F}x\right)(t) = \sum_{i=1}^I a_i(t)f_i(x), \quad t \in (0, \omega],$$

где $a_i \in L_1((0, \omega], \mathbb{R}^m)$, f_i — линейные непрерывные функционалы, $1 \leq i \leq I$. Наборы функций и функционалов в этом представлении можно выбрать линейно независимыми. Учитывая аналитические представления линейных непрерывных функционалов на пространстве непрерывных функций [52], получим следующую форму аналитического представления непрерывного линейного конечномерного оператора

$$(\tilde{F}x)(t) = \sum_{i=1}^I a_i(t) \int_{-\tau}^{\omega} d\mu_i^T(s)x(s), \quad t \in (0, \omega], \quad (2.1.5)$$

где $\mu_i : [-\tau, \omega] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — функции с ограниченной вариацией, $\mu_i(\omega) = 0$, $1 \leq i \leq I$. Из формул (2.1.3) и (2.1.5) находим

$$\eta(t, s-t) = \sum_{i=1}^I a_i(t) \mu_i^T(s), \quad t \in (0, \omega], \quad s \in [-\tau, \omega]. \quad (2.1.6)$$

Оператор (2.1.3) является вольтерровым по Тихонову [105] и имеет ограниченное последствие равное τ . Поэтому ядро Стильеса (2.1.6) конечномерного оператора (2.1.5) должно удовлетворять дополнительным условиям (2.1.4).

Теорема 2.1. *Вольтерровый по Тихонову оператор \tilde{F} с ограниченным последствием τ является конечномерным тогда и только тогда, когда он допускает представление (2.1.5), в котором функции удовлетворяют условиям: $\text{supp } a_i \in (t_i^-, t_i^+]$; $\mu_i(s) = 0$ при $t_i^- < s \leq \omega$ и $\mu_i(s) = \mu_i(t_i^+ - \tau)$, при $-\tau \leq s \leq t_i^+ - \tau$ для некоторых чисел $0 \leq t_i^- < t_i^+ \leq \omega$, $t_i^+ - \tau \leq t_i^-$, $1 \leq i \leq I$.*

Доказательство. Необходимо найти условия, при выполнении которых каждая функция $\eta_i(t, s-t) = a_i(t) \mu_i^T(s)$, $1 \leq i \leq I$, удовлетворяет условию (2.1.4). Последнее возможно тогда и только тогда, когда область $\{(t, s) : t - \tau \leq s \leq t, 0 < t \leq \omega\}$ содержит прямоугольник $\{(t, s) : t_i^+ - \tau \leq s \leq t_i^-, t_i^- < t \leq t_i^+\}$, вне которого функции a_i и μ_i ($1 \leq i \leq I$) определяются специальным образом, указанным в формулировке теоремы. \square

Согласно теореме 2.1 аналитическое представление конечномерного оператора вольтеррового по Тихонову и с ограниченным последствием имеет вид

$$(\tilde{F}x)(t) = \sum_{i=1}^I a_i(t) \int_{t_i^+ - \tau}^{t_i^- + 0} d\mu_i^T(s)x(s), \quad t \in (0, \omega], \quad (2.1.7)$$

где $\text{supp } a_i \in (t_i^-, t_i^+]$, $\mu_i(t_i^- + 0) = 0$, $0 \leq t_i^- < t_i^+ \leq \omega$, $t_i^+ - \tau \leq t_i^-$, $1 \leq i \leq I$. Без ограничения общности числа t_i^- , $1 \leq i \leq I$ будем считать упорядоченными по неубыванию.

В данной работе рассматривается математическая модель линейной периодической неоднородной системы дифференциальных уравнений с последствием

$$\frac{dx(t)}{dt} = (Fx)(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.1.8)$$

в которой линейный оператор $F : C([-τ, +∞), \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1^{loc}((0, +∞), \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет свойству $(Fx(\omega + \cdot))(t) = (Fx(\cdot))(\omega + t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, и его значения на $(0, \omega]$ совпадают со значениями оператора \tilde{F} , $f \in L_1^{loc}((0, +∞), \mathbb{R}^m)$.

Предложенная модель обобщает уравнения с кусочно-постоянными аргументами [3, 5, 7, 10, 13, 26], которые находят приложения при моделировании динамических процессов в теории автоматического управления [9], экологии [15, 22, 33] и экономики [102, 103]. При этом обобщении сохраняется свойство конечномерности пространства решений математической модели с последствием.

Пример 2.11. Рассмотрим линейную периодическую систему дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=0}^K A_k(t)x([t - \tau_k]) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.1.9)$$

где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_K < 1$, A_k , $k = 0, \dots, K$, — 1-периодические матричные функции, интегрируемые на $(0, 1]$. Здесь $\tau = 1 + \tau_K$, $\omega = 1$, оператор $\tilde{F} : C([-τ, 1], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1((0, 1], \mathbb{R}^m)$ определяется формулами

$$\begin{aligned} (\tilde{F}x)(t) &= \sum_{k=1}^K A_k(t)x([t - \tau_k]), \quad t \in (0, 1], \\ (\tilde{F}x)(t) &= \sum_{k=1}^K A_k(t)x(-1), \quad t \in (0, \tau_1), \\ (\tilde{F}x)(t) &= \sum_{k=i+1}^K A_k(t)x(-1) + \sum_{k=1}^i A_k(t)x(0), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 1, \dots, K-1, \\ (\tilde{F}x)(t) &= \sum_{k=1}^K A_k(t)x(0), \quad t \in [\tau_K, 1]. \end{aligned}$$

Тогда, непрерывный линейный конечномерный оператор $\tilde{F} : C([-τ, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L((0, \omega], \mathbb{R}^m)$ можно представить в виде

$$(\tilde{F}x)(t) = \hat{A}_1(t)x(-1) + \hat{A}_2(t)x(0) = \hat{A}_1(t) \int_{-\tau}^1 d\hat{\mu}_1(s)x(s) + \hat{A}_2(t) \int_{-\tau}^1 d\hat{\mu}_2(s)x(s), \quad 0 < t \leq 1,$$

где $\hat{A}_1(t) = \sum_{k=1}^K A_k(t)$, $t \in (0, \tau_1)$; $\hat{A}_1(t) = \sum_{k=i+1}^K A_k(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $1 \leq i \leq K-1$; $\hat{A}_1(t) = 0$, $t \in [\tau_K, 1]$; $\hat{A}_2(t) = 0$, $t \in (0, \tau_1)$; $\hat{A}_2(t) = \sum_{k=1}^i A_k(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $1 \leq i \leq K-1$; $\hat{A}_2(t) = \sum_{k=1}^K A_k(t)$, $t \in [\tau_K, 1]$;

$$\hat{\mu}_1(s) = \begin{cases} 0, & s \in (-1, 1], \\ -I_m, & s \in [-\tau, -1], \end{cases} \quad \hat{\mu}_2(s) = \begin{cases} 0, & s \in (0, 1], \\ -I_m, & s \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

Функции из представления (2.1.7) для данной системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами определяются формулами $a_k(t) = \hat{A}_1(t)e_k$, $\mu_i(s) = \hat{\mu}_1(s)e_i$, $t_i^- = 0$, $t_i^+ = \tau_K$, $1 \leq i \leq m$; $a_i(t) = \hat{A}_2(t)e_{i-m}$, $\mu_i(s) = \hat{\mu}_2(s)e_{i-m}$, $t_i^- = \tau_1$, $t_i^+ = 1$, $m+1 \leq i \leq 2m$. Здесь e_i , $1 \leq i \leq m$, — единичные векторы пространства \mathbb{R}^m .

Пример 2.12. Рассматривается линейное периодическое скалярное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = a \int_{-1}^0 x([t+s]) ds + f(t), \quad a \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Здесь $[\alpha]$ — целая часть числа α , $\tau = 2$, $\omega = 1$.

Оператор $\tilde{F} : C([-2, 1]) \rightarrow L_1((0, 1])$ определяется формулой

$$(\tilde{F}x)(t) = a \int_{-1}^0 x([t+s]) ds, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Учитывая эквивалентность функций пространства $L_1((0, 1])$, отличающихся только на множестве меры нуль, находим

$$(\tilde{F}x)(t) = a(1-t)x(-1) + atx(0) = a_1(t) \int_{-2}^1 d\mu_1(s)x(s) + a_2(t) \int_{-2}^1 d\mu_2(s)x(s), \quad 0 < t \leq 1.$$

Здесь $a_1(t) = a(1-t)$, $a_2(t) = at$, $0 < t \leq 1$; $\mu_1(s) = -1$, $-2 \leq s \leq -1$, $\mu_1(s) = 0$, $-1 < s \leq 1$, $\mu_2(s) = -1$, $-2 \leq s \leq 0$, $\mu_2(s) = 0$, $0 < s \leq 1$; $t_1^- = t_2^- = 0$, $t_1^+ = t_2^+ = 1$.

В результате представление оператора \tilde{F} согласуется с формулой (2.1.7) и имеет вид

$$(\tilde{F}x)(t) = a_1(t) \int_{-1}^{+0} d\mu_1(s)x(s) + a_2(t) \int_{-1}^{+0} d\mu_2(s)x(s), \quad 0 < t \leq 1.$$

Специальный класс математической модели (2.1.8) изучался в работе [104]. Дальнейшим обобщением математической модели (2.1.8) является модель описываемая линейной периодической системой дифференциальных уравнений с последствием и конечномерным оператором монодромии [61, 62].

§2.2. Общее решение системы дифференциальных уравнений с последствием (2.1.8)

Для произвольной функции $\varphi \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m)$ найдем решение $x(t, \varphi)$, $t \in (0, \omega]$, задачи Коши для системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = (Fx)(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.2.1)$$

Интегрируя это уравнение, имеем

$$x(t, \varphi) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^K \int_0^t a_k(s) ds \int_{t_k^+ - \tau}^{t_k^- + 0} d\mu_k^T(s) x(s, \varphi) + \int_0^t f(s) ds, \quad 0 < t \leq \omega.$$

Пусть $\mathcal{K}^- = \{k : t_k^+ \leq \tau, k = 1, \dots, K\}$. Будем полагать, что \mathcal{K}^- не является пустым.

Предыдущее равенство запишем в следующем виде

$$x(t, \varphi) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k(t) g_k(x(\cdot, \varphi)) + \sum_{k \in \mathcal{K}^-} \hat{a}_k(t) g_k^-(\varphi) + \hat{F}(t), \quad 0 < t \leq \omega, \quad (2.2.2)$$

где $\hat{a}_k(t) = \int_0^t a_k(s) ds$, $\hat{F}(t) = \int_0^t f(s) ds$, $0 < t \leq \omega$, $g_k(x(\cdot, \varphi)) = \int_{\max(+0, t_k^+ - \tau)}^{t_k^- + 0} d\mu_k^T(s) x(s, \varphi)$, $1 \leq k \leq K$, $g_k^-(\varphi) = \int_{t_k^+ - \tau}^0 d\mu_k^T(s) \varphi(s)$, $k \in \mathcal{K}^-$.

Используя формулу (2.2.2), получим

$$g_k(x(\cdot, \varphi)) = -\mu^T(\max(+0, t_k^+ - \tau)) \varphi(0) + \sum_{i=1}^K g_k(\hat{a}_i) g_i(x(\cdot, \varphi)) + \sum_{i \in \mathcal{K}^-} g_k(\hat{a}_i) g_i^-(\varphi) + g_k(\hat{F}), \quad 1 \leq k \leq K, \quad (2.2.3)$$

Пусть $1 \leq k \leq i \leq K$. Имеем $a_i(s) = 0$ при $0 < s \leq t \leq t_k^- \leq t_i^-$. Отсюда находим, что $\hat{a}_i(t) = 0$ при $0 < t \leq t_k^-$ и $g_k(\hat{a}_i) = 0$ при $1 \leq k \leq i \leq K$. Пусть $1 \leq i \leq k \leq K$. Имеем $g_k(\hat{a}_i) = \int_{\max(t_i^-, t_k^+ - \tau)}^{t_k^- + 0} d\mu_k^T(t) \int_{t_i^-}^t a_i(s) ds = -\mu_k^T(\max(t_i^-, t_k^+ - \tau)) \int_{t_i^-}^{\max(t_i^-, t_k^+ - \tau)} a_i(s) ds - \int_{\max(t_i^-, t_k^+ - \tau)}^{\min(t_k^- + 0, t_i^+)} \mu_k^T(t) a_i(t) dt$. В результате линейная система алгебраических уравнений для нахождения значений функционалов $g_k(x(\cdot, \varphi))$, $1 \leq k \leq K$, преобразуется к следующему виду

$$g_1(x(\cdot, \varphi)) = p_1, \\ g_k(x(\cdot, \varphi)) = \sum_{i=1}^{K-1} g_k(\hat{a}_i) g_i(x(\cdot, \varphi)) + p_k, \quad (2.2.4)$$

где

$$p_1 = -\mu_1^T(\max(+0, t_1^+ - \tau)) \varphi(0) + g_1(\hat{F}), \\ p_k = -\mu_k^T(\max(+0, t_k^+ - \tau)) \varphi(0) + \sum_{i \in \mathcal{K}^-} g_k(\hat{a}_i) g_i^-(\varphi) + g_k(\hat{F}), \quad 2 \leq k \leq K. \quad (2.2.5)$$

Решение линейной алгебраической системы (2.2.4) определяется формулами

$$g_k(x(\cdot, \varphi)) = \sum_{i=1}^k T_{ki} p_i, \quad 1 \leq k \leq K, \quad (2.2.6)$$

в которых коэффициенты находятся из рекуррентных соотношений $T_{kk} = 1$, $1 \leq k \leq K$, $T_{ki} = \sum_{j=i}^{K-1} g_k(\hat{a}_j) T_{ji}$, $1 \leq i \leq k-1$, $2 \leq k \leq K$. Подставляя в (2.2.6) значения p_i , $1 \leq k \leq K$, определяемые формулами (2.2.5), находим

$$g_1(x(\cdot, \varphi)) = \hat{T}_{10}^T \varphi(0) + g_1(\hat{F}),$$

$$g_k(x(\cdot, \varphi)) = \hat{T}_{k0}^T \varphi(0) + \sum_{j=1}^{k-1} \chi_{\mathcal{K}^-}(j) \hat{T}_{kj} g_j^-(\varphi) + \sum_{j=1}^k T_{kj} g_j(\hat{F}), \quad 2 \leq k \leq K, \quad (2.2.7)$$

где $\hat{T}_{k0} = -\sum_{i=1}^k T_{ki} \mu_i(\max(+0, t_i^+ - \tau))$, $1 \leq k \leq K$, $\hat{T}_{kj} = \sum_{i=j+1}^k T_{ki} g_i(\hat{a}_j)$, $1 \leq j \leq k-1$, $2 \leq k \leq K$, $\chi_E(\cdot)$ — индикатор множества E . При определении общего решения будут использованы также значения $\hat{T}_{kk} = 1$, $1 \leq k \leq K$.

Подставляя значения функционалов (2.2.7) в формулу (2.2.2), находим представление общего решения системы (2.2.1).

Теорема 2.2. *Общее решение системы (2.2.1) определяется формулой*

$$x(t, \varphi) = A_0(t) \varphi(0) + \sum_{j \in \mathcal{K}^-} \hat{\alpha}_j(t) g_j^-(\varphi) + \sum_{j=1}^K \alpha_j(t) g_j(\hat{F}) + \hat{F}(t), \quad 0 < t \leq \omega,$$

где $A_0(t) = I_m + \sum_{k=1}^K \hat{a}_k(t) \hat{T}_{k0}^T$, $\hat{\alpha}_j(t) = \sum_{k=j}^K \hat{a}_k(t) \hat{T}_{kj}$, $j \in \mathcal{K}^-$, $\alpha_j(t) = \sum_{k=j}^K \hat{a}_k(t) T_{kj}$, $1 \leq j \leq K$, $\varphi \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m)$.

§2.3. Сведение к задаче оптимальной стабилизации дискретной системы

Рассматривается линейная управляемая модель с последствием

$$\frac{dx(t)}{dt} = (Fx)(t) + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.3.1)$$

в которой оператор $F : C([- \tau, +\infty), \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1^{loc}((0, +\infty), \mathbb{R}^m)$ определен в §2.1, $u \in \mathbb{R}^r$, B — ω -периодическая матричная функция интегрируемая на $(0, \omega]$.

В множестве допустимых управлений U , формируемых по принципу обратной связи, требуется найти управление u^0 стабилизирующее систему (2.3.1) с наименьшим значением показателя качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T(t) C_1(t) x(t) + u^T(t) C_2(t) u(t)) dt, \quad (2.3.2)$$

где C_1, C_2 — ω -периодические матричные функции, значения которых являются симметрическими положительно определенными матрицами.

Для периодических систем с последствием управления, формируемые по принципу обратной связи, моделируются функциями $u = u(t, x_t(\cdot))$, $u(t + \omega, x_t(\cdot)) = u(t, x_t(\cdot))$, где $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$, $t \in \mathbb{R}^+$. Учитывая специальную форму представления оператора F , множество допустимых управлений U^0 будем моделировать функциями $u = u(t, x_t(\cdot)) = \hat{u}(x_{n\omega}(\cdot))$, $n\omega < t \leq (n+1)\omega$, $n \geq 0$, определяемыми непрерывными отображениями $\hat{u}(\cdot) : C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^r$.

Для рассматриваемого класса допустимых управлений системе (2.3.1) ставится в соответствие счетная система управляемых систем на конечном промежутке времени

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \sum_{k=1}^K a_k(t) \int_{t_k^+ - \tau}^{t_k^- + 0} d\mu_k^T(s) x_n(s) + B(t)u_n, \quad 0 < t \leq \omega, \quad u_n \in \mathbb{R}^r, \quad n \geq 0. \quad (2.3.3)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\omega \geq \tau$. В этом случае критерию качества (2.3.2) будет отвечать критерий качества

$$J = \int_0^{\omega} \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n^T C_1(t) x_n(t) + u_n^T C_2(t) u_n) dt. \quad (2.3.4)$$

Используя теорему 2.2, находим общее решение счетной системы дифференциальных уравнений с последствием (2.3.3)

$$x_n(t, \varphi_n) = A_0(t) \varphi_n(0) + \sum_{j \in \mathcal{K}^-} \hat{\alpha}_j(t) g_j^-(\varphi_n) + \sum_{j=1}^K \alpha_j(t) g_j(\hat{F}_n) + \hat{B}(t) u_n, \quad n \geq 0, \quad t \in (0, \omega], \quad (2.3.5)$$

где

$$\varphi_n \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m), \quad \hat{F}_n(t) = \int_0^t B(s) ds u_n = \hat{B}(t) u_n, \quad t \in (0, \omega], \quad g_j(\hat{F}_n) = \int_{\max(+0, t_j^+ - \tau)}^{t_j^- + 0} d\mu_j^T(s) \hat{B}(s) u_n = \beta_j u_n, \quad 1 \leq j \leq K, \quad n \geq 0.$$

Для согласования решений (2.3.1) и (2.3.3) требуется выполнение условий

$$\varphi_0(s) = \varphi(s) = x_{-1}(\omega + s, \varphi_{-1}), \quad \varphi_n(s) = x_{n-1}(\omega + s, \varphi_{n-1}), \quad n \geq 1, \quad s \in [- \tau, 0], \quad (2.3.6)$$

где $\varphi_{-1} \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m)$ — произвольная непрерывная функция. С учетом этих условий находим

$$g_j^-(\varphi_n) = \hat{g}_j^-(x_{n-1}) = \int_{t_j^+ + \omega - \tau}^{\omega} d\mu_j^T(s - \omega) x_{n-1}(s, \varphi_{n-1}), \quad j \in \mathcal{K}^-, \quad n \geq 0. \quad (2.3.7)$$

В результате формулы (2.3.5) принимают вид

$$x_n(t, \varphi_n) = A_0(t) x_{n-1}(\omega, \varphi_{n-1}) + \sum_{j \in \mathcal{K}^-} \hat{\alpha}_j(t) \hat{g}_j^-(x_{n-1}) + \tilde{B}(t) u_n, \quad n \geq 0, \quad (2.3.8)$$

где $\tilde{B}(t) = \sum_{j=1}^K \alpha_j(t) \beta_j + \hat{B}(t)$, $t \in (0, \omega]$.

Покажем, что величины $x_{n-1}(\omega, \varphi_{n-1})$, $\hat{g}_j^-(x_{n-1})$, $n \geq 1$, удовлетворяют системе разностных уравнений. Имеем

$$x_n(\omega, \varphi_n) = A_0(\omega) x_{n-1}(\omega, \varphi_{n-1}) + \sum_{j \in \mathcal{K}^-} \hat{\alpha}_j(\omega) \hat{g}_j^-(x_{n-1}) + \tilde{B}(\omega) u_n, \quad n \geq 0. \quad (2.3.9)$$

Используя определения функционалов $\hat{g}_j^-, j \in \mathcal{K}^-$, находим

$$\begin{aligned} \hat{g}_j^-(x_n) = & \int_{t_j^+ + \omega - \tau}^{\omega} d\mu_j^T(s - \omega) A_0(s) x_{n-1}(\omega, \varphi_{n-1}) + \sum_{p \in \mathcal{K}^-} \int_{t_j^+ + \omega - \tau}^{\omega} d\mu_j^T(s - \omega) \hat{\alpha}_p(s) \hat{g}_p^-(x_{n-1}) + \\ & + \int_{t_j^+ + \omega - \tau}^{\omega} d\mu_j^T(s - \omega) \tilde{B}(s) u_n, \quad j \in \mathcal{K}^-, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Последние формулы представим в следующей форме

$$\hat{g}_j^-(x_n) = \hat{g}_j^-(A_0) x_{n-1}(\omega, \varphi_{n-1}) + \sum_{p \in \mathcal{K}^-} \hat{g}_j^-(\hat{\alpha}_p) \hat{g}_p^-(x_{n-1}) + \hat{g}_j^-(\tilde{B}) u_n, \quad j \in \mathcal{K}^-, \quad n \geq 0. \quad (2.3.10)$$

Обозначим через y_{in} , $1 \leq i \leq m$, i -ую компоненту вектора $x_n(\omega, \varphi_n)$, $n \geq -1$. Пусть дискретная функция $i \rightarrow j_i$ задает взаимно однозначное отображение упорядоченного множества чисел $\{m+1, \dots, m + \dim \mathcal{K}^-\}$ на множество \mathcal{K}^- . Здесь величина $\dim \mathcal{K}^-$ равняется числу элементов в множестве \mathcal{K}^- . В дальнейшем будем использовать обозначения $y_{in} = \hat{g}_{j_i}^-(x_n)$, $m+1 \leq i \leq m + \dim \mathcal{K}^-$, $y_n^1 = \{y_{in}\}_1^m$, $y_n^2 = \{y_{in}\}_{m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-}$, $n \geq -1$. Тогда решение (2.3.8) системы (2.3.3), с выполненными условиями согласования (2.3.6), опишется формулами

$$x_n(t, \varphi_n) = A_0(t) y_{n-1}^1 + \sum_{j=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} \hat{\alpha}_{j_i}(t) y_{i(n-1)} + \tilde{B}(t) u_n, \quad t \in (0, \omega], \quad n \geq 0, \quad (2.3.11)$$

в которых величины $y_n^1 = \{y_{in}\}_1^m$, $y_n^2 = \{y_{in}\}_{m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-}$, $n \geq 0$, согласно (2.3.9) и (2.3.10), определяются решениями разностной системы уравнений

$$\begin{aligned} y_n^1 &= A_0(\omega) y_{n-1}^1 + \sum_{i=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} \hat{\alpha}_{j_i}(\omega) y_{i(n-1)} + \tilde{B}(\omega) u_n, \\ y_{in} &= \hat{g}_{j_i}^-(A_0) y_{n-1}^1 + \sum_{p=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} \hat{g}_{j_i}^-(\hat{\alpha}_{j_p}) y_{p(n-1)} + \hat{g}_{j_i}^-(\tilde{B}) u_n, \quad m+1 \leq i \leq m + \dim \mathcal{K}^-, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

с начальными условиями y_{i0} , $1 \leq i \leq m + \dim \mathcal{K}^-$.

Используя формулы (2.3.11), преобразуем выражение для критерия качества (2.3.4)

$$\begin{aligned} J = & \sum_{n=0}^{+\infty} \left[y_{n-1}^{1T} \Gamma_1 y_{n-1}^1 + y_{n-1}^{1T} \sum_{i=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} \Gamma_{1i} y_{i(n-1)} + y_{n-1}^{1T} \Gamma_2 u_n + \sum_{i=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} y_{i(n-1)} \Gamma_{1i}^T y_{n-1}^1 + \right. \\ & \left. + \sum_{p,q=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} y_{p(n-1)} \Gamma_{3pq} y_{q(n-1)} + \sum_{i=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} y_{i(n-1)} \Gamma_{2i} u_n + u_n^T \Gamma_2^T y_{n-1}^1 + u_n^T \sum_{i=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} \Gamma_{2i}^T y_{i(n-1)} + u_n^T \Gamma_4 u_n \right], \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

где $\Gamma_1 = \int_0^\omega A_0^T(t) C_1(t) A_0(t) dt$, $\Gamma_2 = \int_0^\omega A_0^T(t) C_1(t) \tilde{B}(t) dt$, $\Gamma_4 = \int_0^\omega (\tilde{B}^T(t) C_1(t) \tilde{B}(t) + C_2(t)) dt$, $\Gamma_{1i} = \int_0^\omega A_0^T(t) C_1(t) \alpha_{j_i}(t) dt$, $\Gamma_{2i} = \int_0^\omega \alpha_{j_i}^T(t) C_1(t) \tilde{B}(t) dt$, $m+1 \leq i \leq m + \dim \mathcal{K}^-$, $\Gamma_{3pq} = \int_0^\omega \alpha_{j_p}^T(t) C_1(t) \alpha_{j_q}(t) dt$, $m+1 \leq p, q \leq m + \dim \mathcal{K}^-$.

Теорема 2.3. Пусть для дискретной задачи оптимальной стабилизации (2.3.12), (2.3.13) существует оптимальное стабилизирующее управление $u_n^0 = \tilde{u}^0(y_{n-1}^1, y_{(m+1)(n-1)}, \dots, y_{(m+\dim \mathcal{K}^-)(n-1)})$, $n \geq 0$. Тогда оптимальное стабилизирующее управление непрерывной задачи оптимальной стабилизации (2.3.1), (2.3.2) с множеством допустимых управлений U^0 определяется формулами

$$u^0 = \hat{u}^0(x_{n\omega}(\cdot)) = \tilde{u}^0 \left(x(n\omega), \int_{t_{j_1}^+ - \tau}^0 d\mu_{j_1}^T(s)x(n\omega + s), \dots, \int_{t_{j_{\dim \mathcal{K}^-}}^+ - \tau}^0 d\mu_{j_{\dim \mathcal{K}^-}}^T(s)x(n\omega + s) \right),$$

где $n\omega < t \leq (n+1)\omega$, $n \geq 0$.

Справедливость теоремы 2.3 обосновывается функциональными зависимостями между описаниями непрерывной и дискретной задач стабилизации, выписанными выше.

§2.4. Расширение множества допустимых управлений

Зададим разбиение полуинтервала $(0, \omega]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = \omega$. Множество допустимых управлений U^1 будем моделировать функциями $u = u(t + \omega, x_t(\cdot)) = u(t, x_t(\cdot))$, $t \in \mathbb{R}^+$, $u = \sum_{j=1}^p \chi_{(t_{j-1}, t_j]}(t - n\omega) u_j(x_{n\omega}(\cdot))$, $n\omega < t \leq (n+1)\omega$, $n \geq 0$, определяемыми непрерывными отображениями $u_j(\cdot) : C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^r$, $1 \leq j \leq p$.

Для рассматриваемого класса допустимых управлений системе (2.3.1) ставится в соответствие счетная система управляемых систем на конечном промежутке времени

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \sum_{k=1}^K a_k(t) \int_{t_k^+ - \tau}^{t_k^- + 0} d\mu_k^T(s)x_n(s) + B(t)u_n, \quad (2.4.1)$$

где $u_n(t) = \sum_{j=1}^p \chi_{(t_{j-1}, t_j]}(t) u_{jn}$, $0 < t \leq \omega$, $u_{jn} \in \mathbb{R}^r$, $1 \leq j \leq p$, $n \geq 0$. Тогда критерий качества (2.3.2) принимает вид

$$J = \int_0^\omega \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n^T(t)C_1(t)x_n(t) + u_n^T(t)C_2(t)u_n(t)) dt. \quad (2.4.2)$$

Используя теорему 2.2, находим общее решение счетной системы дифференциальных уравнений с последействием (2.4.1)

$$x_n(t, \varphi_n) = A_0(t)\varphi_n(0) + \sum_{j \in \mathcal{K}^-} \hat{\alpha}_j(t)g_j^-(\varphi_n) + \sum_{j=1}^K \alpha_j(t)g_j(\hat{F}_n) + \sum_{j=1}^p \hat{B}_j(t)u_{jn}, \quad t \in (0, \omega], \quad (2.4.3)$$

где $\varphi_n \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m)$, $\hat{F}_n(t) = \sum_{q=1}^p \hat{B}_q(t)u_{qn}$, $\hat{B}_q(t) = \int_0^t B(s)\chi_{(t_{q-1}, t_q]}(s)ds$, $t \in (0, \omega]$, $g_j(\hat{F}_n) = \sum_{q=1}^p \beta_{jq}u_{qn}$, $\beta_{jq} = \int_{\max(+0, t_j^+ - \tau)}^{t_j^- + 0} d\mu_j^T(s)\hat{B}_q(s)u_{qn}$, $1 \leq j \leq K$, $1 \leq q \leq p$, $n \geq 0$.

С учетом условий согласования (2.3.6) и формул (2.3.7) из общего решения счетной системы (2.4.3) находим

$$x_n(t, \varphi_n) = A_0(t)x_{n-1}(\omega, \varphi_{n-1}) + \sum_{j \in \mathcal{K}^-} \hat{\alpha}_j(t) \hat{g}_j^-(x_{n-1}) + \sum_{q=1}^p \tilde{B}_q(t) u_{qn}, \quad n \geq 0, \quad (2.4.4)$$

где $\tilde{B}_q(t) = \sum_{j=1}^K \alpha_j(t) \beta_{jq} + \hat{B}_q(t)$, $1 \leq q \leq p$, $t \in (0, \omega]$.

Разностной системе уравнений (2.3.12) соответствует система

$$y_n^1 = A_0(\omega) y_{n-1}^1 + \sum_{i=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} \hat{\alpha}_{j_i}(\omega) y_{i(n-1)} + \sum_{q=1}^p \tilde{B}_q(\omega) u_{qn},$$

$$y_{in} = \hat{g}_{j_i}^-(A_0) y_{n-1}^1 + \sum_{q=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} \hat{g}_{j_i}^-(\alpha_{jq}) y_{q(n-1)} + \sum_{q=1}^p \hat{g}_{j_i}^-(\tilde{B}_q) u_{qn}, \quad m+1 \leq i \leq m+\dim \mathcal{K}^-, \quad n \geq 0, \quad (2.4.5)$$

с начальными условиями $y_{i(-1)}$, $1 \leq i \leq m + \dim \mathcal{K}^-$. Соответствующий ей критерий качества будет определяться формулой

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[y_{n-1}^{1T} \Gamma_1 y_{n-1}^1 + y_{n-1}^{1T} \sum_{i=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} \Gamma_{1i} y_{i(n-1)} + y_{n-1}^{1T} \sum_{q=1}^p \Gamma_{2q} u_{qn} + \sum_{i=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} y_{i(n-1)} \Gamma_{1i}^T y_{n-1}^1 + \right.$$

$$+ \sum_{p,q=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} y_{p(n-1)} \Gamma_{3pq} y_{q(n-1)} + \sum_{i=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} y_{i(n-1)} \sum_{q=1}^p \Gamma_{2iq} u_{qn} +$$

$$\left. + \sum_{q=1}^p u_{qn}^T \Gamma_{2q}^T y_{n-1}^1 + \sum_{q=1}^p u_{qn}^T \sum_{i=m+1}^{m+\dim \mathcal{K}^-} \Gamma_{2iq}^T y_{i(n-1)} + \sum_{j,q=1}^p u_{qn}^T \Gamma_{4jq} u_{jn} \right]. \quad (2.4.6)$$

Здесь величины Γ_1 , Γ_{1i} , $m+1 \leq i \leq m+\dim \mathcal{K}^-$, Γ_{3pq} , $m+1 \leq p, q \leq m+\dim \mathcal{K}^-$, определяются формулами приведенными выше, $\Gamma_{2q} = \int_0^\omega A_0^T(t) C_1(t) \tilde{B}_q(t) dt$, $\Gamma_{2iq} = \int_0^\omega \alpha_{j_i}^T(t) C_1(t) \tilde{B}_q(t) dt$, $m+1 \leq i \leq m+\dim \mathcal{K}^-$, $\Gamma_{4jq} = \int_0^\omega \tilde{B}_q^T(t) C_1(t) \tilde{B}_j(t) dt + \delta_{jq} \int_{t_{j-1}^+}^{t_j^+} C_2(t) dt$, δ_{jq} — символ Кронекера, $1 \leq j, q \leq p$.

В результате справедливо обобщение теоремы 2.3.

Теорема 2.4. Пусть для дискретной задачи оптимальной стабилизации (2.4.5), (2.4.6) существует оптимальное стабилизирующее управление $u_{qn}^0 = \tilde{u}_q^0(y_{n-1}^1, y_{(m+1)(n-1)}, \dots, y_{(m+\dim \mathcal{K}^-)(n-1)})$, $1 \leq q \leq p$, $n \geq 0$. Тогда оптимальное стабилизирующее управление непрерывной задачи оптимальной стабилизации (2.3.1), (2.3.2) с множеством допустимых управлений U^1 определяется формулами

$$u^0 = \sum_{q=1}^p \chi_{(t_{q-1}, t_q]}(t - n\omega) \tilde{u}_q^0 \left(x(n\omega), \int_{t_{j_1}^+ - \tau}^0 d\mu_{j_1}^T(s) x(n\omega + s), \dots, \int_{t_{j_{\dim \mathcal{K}^-}}^+ - \tau}^0 d\mu_{j_{\dim \mathcal{K}^-}}^T(s) x(n\omega + s) \right),$$

где $n\omega < t \leq (n+1)\omega$, $n \geq 0$.

Теоремы 2.3 и 2.4 позволяют использовать известные методы оптимальной стабилизации автономных дискретных систем [71, 106] при нахождении оптимального стабилизирующего управления линейной периодической конечномерной системы дифференциальных уравнений с последействием. Последние системы можно использовать в качестве аппроксимационных моделей для общих линейных периодических систем с последействием и находить для последних приближения оптимальных стабилизирующих управлений.

Пример 2.13. Рассмотрим линейное скалярное уравнение с конечномерным вольтерровым оператором

$$\frac{dx(t)}{dt} = \chi_{(0.2, 1.8]}^{2\pi}(t) \sin(t) \int_{-0.2}^{0.2} x(s) ds + u, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.4.7)$$

Здесь $(\hat{F}x)(t) = a_1(t) \int_{-0.2}^{0.2} d\mu_1(s)x(s)$, $a_1(t) = \chi_{(0.2, 1.8]}^{2\pi}(t) \sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\chi_{(0.2, 1.8]}^{2\pi}(t+T) = \chi_{(0.2, 1.8]}^{2\pi}(t)$, $\chi_{(0.2, 1.8]}^{2\pi}(t) = 1$, $t \in (0.2, 1.8]$, $\chi_{(0.2, 1.8]}^{2\pi}(t) = 0$, $t \in (0, 0.2] \cup (1.8, 2\pi]$, $\text{supp } a_1 \subseteq (t_1^-, t_1^+) = (0.2, 1.8]$, $\tau = 2$, $\omega = 2\pi$, $\mu_1(s) = s - 0.2$ при $s \in (-0.2, 0.2]$, $\mu_1(s) = -0.4$ при $s \in [-2, -0.2]$, $\mu_1(s) = 0$ при $s \in (0.2, 2\pi]$. В качестве начальной функции φ на отрезке $[-2, 0]$ задана $\varphi(t) = t^2$. Решению уравнения (2.4.7) поставлен в соответствие критерий качества процесса управления

$$J = \int_0^{+\infty} (x^2(t) + u^2(t)) dt.$$

Решение задачи будем осуществлять в классе допустимых управлений

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^3 \chi_{(t_{j-1}, t_j]}(t) u_{jn}, \quad 0 < t \leq \omega, \quad u_j \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq 3, \quad n \geq 0,$$

где $t_0 = 0$, $t_1 = 2.0944$, $t_2 = 4.18879$, $t_3 = 6.28319$.

Запишем эквивалентную дискретную задачу оптимальной стабилизации решения системы разностных уравнений (2.4.5) с дискретным критерием качества (2.4.6). Имеем

$$y_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1.20724 \\ 0.199 & 0.240241 \end{pmatrix} y_n + \begin{pmatrix} 2.09748 & 2.07345 & 2.10487 \\ 0.416797 & 0.416961 & 0.395425 \end{pmatrix} \hat{u}_n,$$

$$J(y_n, u_n) = y_n^T \begin{pmatrix} 6.28319 & 6.20244 \\ 6.20244 & 7.14311 \end{pmatrix} y_n + 2y_n^T \begin{pmatrix} 10.9968 & 6.57703 & 2.19016 \\ 12.3798 & 7.94007 & 2.64406 \end{pmatrix} \hat{u}_n + \\ + \hat{u}_n^T \begin{pmatrix} 23.6506 & 13.7891 & 4.58532 \\ 13.7891 & 14.3392 & 4.58378 \\ 4.58532 & 4.58378 & 5.15071 \end{pmatrix} \hat{u}_n.$$

Здесь $\hat{u}_n = \{u_{jn}\}_{j=1}^3$, $n \geq 0$. Заменой управления

$$\tilde{u}_n = \hat{u}_n + \begin{pmatrix} 0.44961 & 0.456488 \\ 0.0256217 & 0.112594 \\ 0.00215783 & 0.00675874 \end{pmatrix} y_n$$

приведем полученную задачи к виду

$$y_{n+1} = \begin{pmatrix} -0.000713168 & 0.00208691 \\ 0.0000675386 & 0.000358958 \end{pmatrix} y_n + \begin{pmatrix} 2.09748 & 2.07345 & 2.10487 \\ 0.416797 & 0.416961 & 0.395425 \end{pmatrix} \tilde{u}_n,$$

$$J(y_n, \tilde{u}_n) = y_n^T \begin{pmatrix} 1.1657 & 0.427218 \\ 0.427218 & 0.580009 \end{pmatrix} y_n + \tilde{u}_n^T \begin{pmatrix} 23.6506 & 13.7891 & 4.58532 \\ 13.7891 & 14.3392 & 4.58378 \\ 4.58532 & 4.58378 & 5.15071 \end{pmatrix} \tilde{u}_n.$$

Для решения полученной задачи применим метод приведения к устойчивой форме Шура, подробно описанный в разделе 1.2.2. В результате применения данного алгоритма получим оптимальные стабилизирующие управления

$$\tilde{u}_n^0 = \begin{pmatrix} 1.27025 \times 10^{-6} & -4.09066 \times 10^{-6} \\ 6.70698 \times 10^{-6} & -0.000022655 \\ 0.000153846 & -0.000503484 \end{pmatrix} y_n, \quad \hat{u}_n^0 = - \begin{pmatrix} 0.449609 & 0.456492 \\ 0.025615 & 0.112616 \\ 0.00200398 & 0.00726222 \end{pmatrix} y_n.$$

В результате по теореме 2.4 получим управление, стабилизирующее решение (2.4.7) в виде

$$\begin{aligned} u^0 = & -0.449609\chi_{(0,2.0944]}(t-2\pi n)x(2\pi n) - 0.456492\chi_{(0,2.0944]}(t-2\pi n) \int_{-0.2}^0 x(2\pi n+s)ds - \\ & -0.025615\chi_{(2.0944,4.18879]}(t-2\pi n)x(2\pi n) - 0.112616\chi_{(2.0944,4.18879]}(t-2\pi n) \int_{-0.2}^0 x(2\pi n+s)ds - \\ & -0.00200398\chi_{(4.18879,6.28319]}(t-2\pi n)x(2\pi n) - 0.00726222\chi_{(4.18879,6.28319]}(t-2\pi n) \int_{-0.2}^0 x(2\pi n+s)ds, \end{aligned}$$

где $2\pi n < t \leq 2\pi(n+1)$, $n = 0, 1, \dots$. Значение минимизируемого функционала составило 4.00213×10^{-6} .

ГЛАВА 3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АП- ПРОКСИМАЦИЙ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

§3.1. Конечномерные аппроксимации периодических дифференциальных уравнений с последствием

Используем описание линейного периодического функционально-дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = (Fx)(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty),$$

предложенное в работе [36, с.8]. Здесь $x : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$, линейный вольтерровый по Тихонову [105] оператор $F : C([-\tau, +\infty), \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1^{loc}((0, +\infty), \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет свойству $(Fx(\omega + \cdot))(t) = (Fx(\cdot))(\omega + t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, а его значения на $(0, \omega]$ совпадают со значениями линейного непрерывного вольтеррового оператора $\hat{F} : C([-\tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1((0, \omega], \mathbb{R}^m)$, определяемого формулами

$$\left(\hat{F}x\right)(t) = \int_{-\tau}^0 d\eta(t, \theta)x(t + \theta) = \int_{t-\tau}^t d\eta(t, s-t)x(s) = \int_{-\tau}^{\omega} d\eta(t, s-t)x(s), \quad t \in (0, \omega], \quad (3.1.1)$$

в которых $\eta(t, s-t) = 0$, $t \leq s \leq \omega$, $\eta(t, s-t) = \eta(t, -\tau)$, $-\tau \leq s \leq t - \tau$, $0 < t \leq \omega$. Предполагается, что элементы η_{pq} , $1 \leq p, q \leq m$, матричнозначной функции η — ω -периодические функции по первому аргументу, при каждом фиксированном значении второго аргумента $\theta \in [-\tau, 0]$ интегрируемы по Лебегу на $(0, \omega]$, а при почти каждом фиксированном значении первого аргумента $t \in (0, \omega]$ имеют ограниченные вариации $\text{var}_{[-\tau, 0]} \eta_{pq}(t, \cdot)$, $1 \leq p, q \leq m$, интегрируемые по Лебегу на $(0, \omega]$, $\eta(t, 0) = 0$, $t \in (0, \omega]$. В дальнейшем, будем также полагать, что $0 < \tau \leq \omega$.

Используя разбиение $\Delta_I : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_I = \omega$ полуинтервала $(0, \omega]$ с дополнительными условиями $0 < t_i - t_{i-1} \leq \tau$, $1 \leq i \leq I$, определим класс операторов $\hat{F}_I : C([-\tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1((0, \omega], \mathbb{R}^m)$ с помощью формул

$$\left(\hat{F}_I x\right)(t) = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{K_i} A_{ik}(t) \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \int_{t_i-\tau}^{t_{i-1}} d\hat{\eta}_{ik}(s)x(s), \quad t \in (0, \omega]. \quad (3.1.2)$$

Здесь K_i — натуральные числа; A_{ik} — ω -периодические матричнозначные функции интегрируемые по Лебегу на $(0, \omega]$; $\chi_E(\cdot)$ — индикатор множества E ; $\hat{\eta}_{ik}$ — матричнозначные функции, элементы которых имеют ограниченные вариации на $[-\tau, \omega]$, $\hat{\eta}_{ik}(s) = 0$ при $s \in (t_{i-1}, \omega]$, $\hat{\eta}_{ik}(s) = \hat{\eta}_{ik}(t_i - \tau)$ при $s \in [-\tau, t_i - \tau]$, $1 \leq k \leq K_i$, $1 \leq i \leq I$; при каждом i , $1 \leq i \leq I$, набор функций A_{ik} и $\hat{\eta}_{ik}$, $1 \leq k \leq K_i$, выбран линейно независимым.

Из определения операторов (3.1.2) следует их конечномерность и вольтерровость по Тихонову [105].

Определение. Класс операторов (3.1.2) назовем аппроксимирующим для оператора (3.1.1), если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся разбиение Δ_I и натуральные числа K_i , $1 \leq i \leq I$, такие, что $\|\hat{F}x - \hat{F}_I x\|_{L_1} < \varepsilon$ для каждой функции $x \in C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m)$. Здесь $\|y\|_{L_1} = \int_0^\omega |y(t)| dt = \int_0^\omega \max_{1 \leq p \leq m} |y_p(t)| dt$, $y \in L_1((0, \omega], \mathbb{R}^m)$.

Рассмотрим некоторые реализации классов аппроксимирующих операторов.

Определим класс дискретных операторов \hat{F}_I^d с помощью формул

$$(\hat{F}_I^d x)(t) = \sum_{i=1}^I \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \sum_{j=-M+1}^i \int_{\mathcal{A}_j} d\eta(t, z-t)x(t_{j-1}), \quad t \in (0, \omega], \quad (3.1.3)$$

где $t_{j-I} = t_j - \omega$, $j = 1 \dots I-1$, t_{-M} — точка, ближайшая к точке $t = -\tau$ и расположенная справа от нее, $\mathcal{A}_j = (t_{j-1}, t_j] \cap (t - \tau, t]$, $j = -M+1, \dots, i$, $i = 1, \dots, I$, $t \in (0, \omega]$.

Для дискретной реализации класса (3.1.2) имеем $K_i = i + M$, $A_{ik}(t) = \int_{\mathcal{A}_{k-M}} d\eta(t, z-t)$, $\hat{\eta}_{ik}(s) = -I_m$, при $-\tau \leq s \leq t_{k-M-1}$ и $\hat{\eta}_{ik}(s) = 0$ при $t_{k-M-1} < s \leq \omega$, $1 \leq k \leq K_i$, $1 \leq i \leq I$.

Обозначим через δ_I , $\delta_I < \tau$, диаметр разбиения Δ_I полуинтервала $(0, \omega]$, $|a| = \max_{1 \leq p \leq m} |a_p|$, $a = \{a_p\}_1^m \in \mathbb{R}^m$.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия, наложенные на η при определении оператора \hat{F} . Тогда класс дискретных операторов (3.1.3) является аппроксимирующим для оператора (3.1.1). Если при $I \rightarrow +\infty$ диаметр разбиения δ_I полуинтервала $(0, \omega]$ стремится к нулю, то последовательность операторов $\{\hat{F}_I^d\}_1^{+\infty}$, определяемая формулами (3.1.3), сильно сходится к оператору \hat{F} .

Доказательство. Из определения операторов \hat{F} и \hat{F}_I^d , $I \geq 1$, следует, что

$$\|\hat{F}x - \hat{F}_I^d x\|_{L_1} = \int_0^\omega \left| (\hat{F}x)(t) - (\hat{F}_I^d x)(t) \right| dt = \sum_{i=1}^I \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \sum_{j=-M+1}^i \int_{\mathcal{A}_j} d\eta(t, z-t) (x(z) - x(t_{j-1})) \right| dt.$$

Учитывая последнее равенство, находим

$$\begin{aligned} \|\hat{F}x - \hat{F}_I^d x\|_{L_1} &\leq \sum_{i=1}^I \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{j=-M+1}^i \left| \int_{\mathcal{A}_j} d\eta(t, z-t) (x(z) - x(t_{j-1})) \right| dt \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^I \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{j=-M+1}^i \max_{1 \leq p \leq m} \sum_{q=1}^m \text{var } \eta_{pq}(t, z-t) dt \sup_{z \in \mathcal{A}_j} |x(z) - x(t_{j-1})| \leq \\ &\leq \Omega_{\delta_I}(x) \sum_{i=1}^I \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{p,q=1}^m \text{var } \eta_{pq}(t, z-t) dt \leq \Omega_{\delta_I}(x) \int_0^\omega \sum_{p,q=1}^m \text{var } \eta_{p,q}(t, s) dt. \end{aligned}$$

Здесь $\Omega_{\delta_I}(x) = \sup_{|z_1 - z_2| \leq \delta_I} |x(z_1) - x(z_2)|$ — модуль непрерывности функции x на отрезке $[-\tau, \omega]$. \square

Значения операторов \hat{F}_I^d , $I \geq 1$, зависят только от значений функций $x \in C([-\tau, \omega], \mathbb{R}^m)$ в дискретные моменты времени t . Такие операторы появляются при описании дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами [3, 5, 15]. В этих уравнениях, обычно, числа t_i , $0 \leq i \leq I$, соизмеримы. Так как стремление к нулю диаметра разбиения δ_I полуинтервала $(0, \omega]$ можно обеспечить при выборе соизмеримых чисел t_i , $0 \leq i \leq I$, то такие уравнения можно использовать при построении приближений для периодического функционально-дифференциального уравнения общего вида.

Используя усреднение по Стеклову [69, с.316], определим реализацию класса конечно-мерных вольтерровых операторов (3.1.2), с помощью формул

$$(\hat{F}_I^s x)(t) = \sum_{i=1}^I \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \sum_{j=-M+1}^i \int_{\mathcal{A}_j} d\eta(t, z-t) \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(s) ds, \quad t \in (0, \omega]. \quad (3.1.4)$$

Для усредняющей реализации класса (3.1.2) имеем $K_i = i - 1 + M$, $A_{ik}(t) = \int_{\mathcal{A}_{k-M}} d\eta(t, z-t)$, $\hat{\eta}_{ik}(s) = -1$, при $s \in (-\tau, t_{k-M-1}]$, $\hat{\eta}_{ik}(s) = (s - t_{k-M}) / (t_{k-M} - t_{k-M-1})$ при $s \in (t_{k-M-1}, t_{k-M}]$, $\hat{\eta}_{ik}(s) = 0$, при $s \in (t_{k-M}, \omega]$, $1 \leq k \leq K_i$, $1 \leq i \leq I$.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия, наложенные на η при определении оператора \hat{F} , а также $\int_0^\omega \text{var}_{s \in [-\delta, 0]} \eta_{p,q}(t, s) dt \rightarrow 0$, $1 \leq p, q \leq m$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда класс дискретных операторов (3.1.4) является аппроксимирующим для оператора (3.1.1). Если при $I \rightarrow +\infty$ имеем $\delta_I \rightarrow 0$, то последовательность операторов $\{\hat{F}_I^s\}_1^{+\infty}$, определяемая формулами (3.1.4) сильно сходится к оператору \hat{F} .

Доказательство. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \left\| \hat{F}x - \hat{F}_I^s x \right\|_{L_1} &= \int_0^\omega \left| (\hat{F}x)(t) - (\hat{F}_I^s x)(t) \right| dt = \\ &= \sum_{i=1}^I \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \sum_{j=-M+1}^{i-1} \int_{\mathcal{A}_j} d\eta(t, z-t) \left(x(z) - \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(s) ds \right) \right| dt, \end{aligned}$$

из которого следуют оценки

$$\begin{aligned}
\left\| \hat{F}x - \hat{F}_I^s x \right\|_{L_1} &\leq \sum_{i=1}^I \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{j=-M+1}^{i-1} \left| \int_{\mathcal{A}_j} d\eta(t, z-t) \left(x(z) - \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(s) ds \right) \right| dt \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^I \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sum_{j=-M+1}^{i-1} \max_{1 \leq p \leq m} \sum_{q=1}^m \operatorname{var}_{z \in \mathcal{A}_j} \eta_{pq}(t, z-t) \sup_{z \in \mathcal{A}_j} \left| x(z) - \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(s) ds \right| dt + \\
&\quad + \sum_{i=1}^I \int_{t_{i-1}}^{t_i} \max_{1 \leq p \leq m} \sum_{q=1}^m \operatorname{var}_{z \in \mathcal{A}_j} \eta_{pq}(t, z-t) \sup_{z \in \mathcal{A}_j} |x(z)| dt \leq \\
&\leq \sum_{p,q=1}^m \int_0^\omega \operatorname{var}_{s \in [-\tau, 0]} \eta_{pq}(t, s) dt \max_{-M+1 \leq j \leq I} \sup_{z \in (t_{j-1}, t_j]} \left| x(z) - \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(s) ds \right| + \\
&\quad + \sum_{p,q=1}^m \int_0^\omega \operatorname{var}_{s \in [-\delta_I, 0]} \eta_{pq}(t, s) dt \sup_{z \in (0, \omega]} |x(z)|.
\end{aligned}$$

Второе слагаемое в последнем неравенстве стремится к нулю при $\delta_I \rightarrow 0$. Для первого слагаемого в этом неравенстве оценим величину

$$\begin{aligned}
&\max_{-M+1 \leq j \leq I} \sup_{z \in (t_{j-1}, t_j]} \left| x(z) - \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(s) ds \right| \leq \max_{-M+1 \leq j \leq I} \sup_{z \in (t_{j-1}, t_j]} |x(z) - x(\tilde{t}_j)| + \\
&+ \max_{-M+1 \leq j \leq I} \left| x(\tilde{t}_j) - \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(s) ds \right| \leq \Omega_{\delta_I}(x) + \max_{-M+1 \leq j \leq I} \left| x(\tilde{t}_j) - \frac{1}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} x(s) ds \right|,
\end{aligned}$$

где $\tilde{t}_j = (t_{j-1} + t_j)/2$, $-M+1 \leq j \leq I$. При $\delta_I \rightarrow 0$ модуль непрерывности $\Omega_{\delta_I}(x)$ функции x на отрезке $[-\tau, \omega]$ стремится к нулю. Второе слагаемое в последнем неравенстве стремится к нулю в силу свойства усреднения Стеклова для непрерывных функций [69, с.318]. \square

Усилим требования к функции η , наложенные при определении оператора \hat{F} , полагая $\operatorname{var}_{z \in [-\tau, 0]} \eta_{pq}(\cdot, z) \in L_2(0, \omega]$, $1 \leq p, q \leq m$. Тогда оператор $\hat{F} : C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_2((0, \omega], \mathbb{R}^m)$. Введем ограниченные вольтерровые операторы $\hat{F}_{\Delta_I} : C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_2((0, \omega], \mathbb{R}^m)$ с помощью формул

$$\left(\hat{F}_{\Delta_I} x \right) (t) = \sum_{i=1}^I \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \int_{t_i - \tau}^{t_{i-1}} d\eta(t, s-t) x(s), \quad t \in (0, \omega].$$

Для пространств $L_2((t_{i-1}, t_i], \mathbb{R}^m)$ рассмотрим полные ортонормированные системы функций $\{\psi_{ik}(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty}$, $1 \leq i \leq I$. Определим реализацию класса конечномерных вольтерровых

операторов (3.1.2), с помощью абстрактных рядов Фурье [43, с.29], используя формулы

$$\left(\hat{F}_I^f x\right)(t) = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{K_i} \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \psi_{ik}(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_{ik}^T(z) \int_{t_i-\tau}^{t_{i-1}} d\eta(z, s-z) x(s) dz, \quad t \in (0, \omega].$$

Полагая $\psi_{ik}(t) = 0$ при $t \in (0, \omega] \setminus (t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq k \leq K_i$, $1 \leq i \leq I$, их представления преобразуем к виду

$$\left(\hat{F}_I^f x\right)(t) = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^{K_i} \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \psi_{ik}(t) \int_{t_i-\tau}^{t_{i-1}} d\tilde{\eta}_{ik}(s) x(s), \quad t \in (0, \omega]. \quad (3.1.5)$$

Для полученной реализации класса (3.1.2) имеем $A_{ik}(t) = \psi_{ik}(t)e^T$, $t \in (0, \omega]$, $\hat{\eta}_{ik}(s) = e \tilde{\eta}_{ik}(s)$, $\tilde{\eta}_{ik}(s) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_{ik}^T(z) \eta(z, s-z) dz$, $s \in [t_i - \tau, t_{i-1}]$, $1 \leq k \leq K_i$, $1 \leq i \leq I$, где $e = (1 \ 0 \ \dots \ 0)^T \in \mathbb{R}^m$.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия, наложенные на η при определении оператора \hat{F} , а также

$$1) \quad \text{var}_{z \in [-\tau, 0]} \eta_{pq}(\cdot, z) \in L_2(0, \omega], \quad 1 \leq p, q \leq m,$$

$$2) \quad \int_0^\omega \left(\text{var}_{z \in (-\delta, 0]} \eta_{pq}(t, z) \right)^2 dt \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \int_0^\omega \left(\text{var}_{z \in [-\tau, -\tau+\delta]} \eta_{pq}(t, z) \right)^2 dt \rightarrow 0, \quad 1 \leq p \leq q \leq m, \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0.$$

Тогда класс операторов (3.1.5), определяемых с помощью абстрактных рядов Фурье, является аппроксимирующим для оператора (3.1.1). Если при $I \rightarrow +\infty$ имеем $\delta_I \rightarrow 0$ и $K_i \rightarrow +\infty$, $1 \leq i \leq I$, то последовательность операторов $\{\hat{F}_I^f\}_1^{+\infty}$ сильно сходится к оператору \hat{F} .

Доказательство. Справедливо равенство

$$\left(\hat{F}x\right)(t) - \left(\hat{F}_I^f x\right)(t) = \left(\hat{F}x\right)(t) - \left(\hat{F}_{\Delta_I} x\right)(t) + \left(\hat{F}_{\Delta_I} x\right)(t) - \left(\hat{F}_I^f x\right)(t), \quad t \in (0, \omega].$$

При $t \in [t_{i-1}, t_i)$ имеем

$$\left(\hat{F}x\right)(t) - \left(\hat{F}_{\Delta_I} x\right)(t) = \int_{t_{i-1}}^t d\eta(t, s-t) x(s) + \int_{t-\tau}^{t_i-\tau} d\eta(t, s-t) x(s).$$

Отсюда получим неравенство

$$\begin{aligned} \left| \left(\hat{F}x\right)(t) - \left(\hat{F}_{\Delta_I} x\right)(t) \right| &\leq \left(\max_{1 \leq p \leq m} \sum_{q=1}^m \text{var}_{s \in (t_{i-1}, t]} \eta_{pq}(t, s-t) + \max_{1 \leq p \leq m} \sum_{q=1}^m \text{var}_{s \in [t-\tau, t_i-\tau]} \eta_{pq}(t, s-t) \right) \max_{s \in [t_{i-1}-\tau, t_i]} |x(s)| \leq \\ &\leq \sum_{p, q=1}^m \left(\text{var}_{z \in (t_{i-1}-t, 0]} \eta_{pq}(t, z) + \text{var}_{z \in [-\tau, t_i-t-\tau]} \eta_{pq}(t, z) \right) \max_{s \in [t_{i-1}-\tau, t_i]} |x(s)| \leq \\ &\leq \sum_{p, q=1}^m \left(\text{var}_{z \in (-\delta_I, 0]} \eta_{pq}(t, z) + \text{var}_{z \in [-\tau, -\tau+\delta_I]} \eta_{pq}(t, z) \right) \max_{s \in [-\tau, \omega]} |x(s)|, \quad t \in (t_{i-1}, t_i]. \end{aligned}$$

Здесь $|x(s)| = \max_{1 \leq q \leq m} |x_q(s)|$, $s \in [-\tau, \omega]$. В результате находим следующую оценку

$$\int_0^\omega \left| (\hat{F}x)(t) - (\hat{F}_{\Delta_I}x)(t) \right|^2 dt \leq 2m^2 \sum_{p,q=1}^m \int_0^\omega \left(\left(\operatorname{var}_{z \in (-\delta_I, 0]} \eta_{pq}(t, z) \right) + \left(\operatorname{var}_{z \in [-\tau, -\tau + \delta_I]} \eta_{pq}(t, z) \right) \right) dt \max_{s \in [-\tau, \omega]} |x(s)|^2,$$

из которой следует равномерная сходимость последовательности операторов $\{\hat{F}_{\Delta_I}\}_{I=1}^{+\infty}$ к оператору \hat{F} .

При $t \in (t_{i-1}, t_i]$, $1 \leq i \leq I$, имеем равенство

$$\left(\hat{F}_{\Delta_I}x \right)(t) - \left(\hat{F}_I^f x \right)(t) = \int_{t_i-\tau}^{t_{i-1}} d\eta(t, s-t)x(s) - \sum_{k=1}^{K_i} \psi_{ik}(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_{ik}^T(z) \int_{t_i-\tau}^{t_{i-1}} d\eta(z, s-z)x(s) dz.$$

Из полноты ортонормированной системы функций $\{\psi_{ik}(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty}$ в пространстве $L_2((t_{i-1}, t_i], \mathbb{R}^m)$, $1 \leq i \leq I$, следует, что для любого $\varepsilon_i > 0$ найдется натуральное число \tilde{K}_i такое, что при $K_i > \tilde{K}_i$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \int_{t_i-\tau}^{t_{i-1}} d\eta(t, s-t)x(s) - \sum_{k=1}^{K_i} \psi_{ik}(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_{ik}^T(z) \int_{t_i-\tau}^{t_{i-1}} d\eta(z, s-z)x(s) dz \right|^2 dt < \varepsilon_i,$$

$1 \leq i \leq I$, для любой функции $x(\cdot) \in C([-\tau, \omega], \mathbb{R}^m)$, [43, с.54]. Пусть ε — произвольное, как угодно малое положительное число. Полагаем $\varepsilon_i = \varepsilon/i^2$, $1 \leq i \leq I$. В результате находим следующую оценку

$$\begin{aligned} \int_0^\omega \left| (\hat{F}_{\Delta_I}x)(t) - (\hat{F}_I^f x)(t) \right|^2 dt &\leq \sum_{i=1}^I \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \int_{t_i-\tau}^{t_{i-1}} d\eta(t, s-t)x(s) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{K_i} \psi_{ik}(t) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi_{ik}^T(z) \int_{t_i-\tau}^{t_{i-1}} d\eta(z, s-z)x(s) dz \right|^2 dt \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} \end{aligned}$$

для любой функции $x(\cdot) \in C([-\tau, \omega], \mathbb{R}^m)$, из которой следует сильная сходимость последовательность операторов $\{\hat{F}_{\Delta_I} - \hat{F}_I^f\}_{I=1}^{+\infty}$ к нулю. \square

§3.2. Счетная система неоднородных дифференциальных уравнений в функциональном пространстве

Рассмотрим линейную периодическую неоднородную систему дифференциальных уравнений с последствием

$$\frac{dx(t)}{dt} = (F_I x)(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \quad (3.2.1)$$

где линейный вольтерровый по Тихонову оператор $F_I : C([-\tau, +\infty), \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1^{loc}((0, +\infty], \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет свойству $(F_I x(\omega + \cdot))(t) = (F_I x(\cdot))(\omega + t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, а его

значения на $(0, \omega]$ совпадают со значениями линейного оператора $\hat{F}_I : C([-\tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1((0, \omega], \mathbb{R}^m)$, функция g локально интегрируема на \mathbb{R}^+ , решение $x(t)$, $t \geq -\tau$, системы (3.2.1) удовлетворяет начальному условию $x(t) = \varphi(t)$, $t \in [-\tau, 0]$, $\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^m)$.

Поставим в соответствие этой системе счетную совокупность неоднородных систем функционально-дифференциальных уравнений на конечном промежутке времени

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \left(\hat{F}_I x_n \right) (t) + g_n(t), \quad t \in (0, \omega], \quad n \geq 0, \quad (3.2.2)$$

где $x_n(t) = x(n\omega + t)$, $t \in [-\tau, \omega]$, $g_n(t) = g(n\omega + t)$, $t \in (0, \omega]$, $n \geq 0$.

Для эквивалентности описаний (3.2.1) и (3.2.2) требуется выполнение условий

$$x_n(s) = x_{n-1}(s + \omega), \quad n \geq 1, \quad x_0(s) = \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0]. \quad (3.2.3)$$

Пусть I_- — номер точки разбиения, удовлетворяющей условиям $I_- = \max_{t_i < \tau} i$, $I_- \geq 1$. Используя формулу (3.1.2), находим

$$\begin{aligned} (\hat{F}_I x_n)(t) &= \sum_{i=1}^{I_-} \sum_{k=1}^{K_i} A_{ik}(t) \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \int_{t_i - \tau}^0 d\hat{\eta}_{ik}(s) x_n(s) + \sum_{i=1}^{I_-} \sum_{k=1}^{K_i} A_{ik}(t) \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \int_0^{t_{i-1}} d\hat{\eta}_{ik}(s) x_n(s) + \\ &+ \sum_{i=I_-+1}^I \sum_{k=1}^{K_i} A_{ik}(t) \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \int_{t_i - \tau}^{t_{i-1}} d\hat{\eta}_{ik}(s) x_n(s). \end{aligned}$$

Используя условия (3.2.3) получим равенства $\int_{t_i - \tau}^0 d\hat{\eta}_{ik}(s) x_n(s) = \int_{t_i - \tau}^0 d\hat{\eta}_{ik}(s) x_{n-1}(s + \omega) = \int_{t_i - \tau + \omega}^{\omega} d\hat{\eta}_{ik}(s - \omega) x_{n-1}(s)$, $1 \leq i \leq I_-$, с учетом которых последняя формула принимает вид

$$\begin{aligned} (\hat{F}_I x_n)(t) &= \sum_{i=1}^{I_-} \sum_{k=1}^{K_i} A_{ik}(t) \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \int_{t_i - \tau + \omega}^{\omega} d\hat{\eta}_{ik}(s - \omega) x_{n-1}(s) + \sum_{i=1}^{I_-} \sum_{k=1}^{K_i} A_{ik}(t) \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \int_0^{t_{i-1}} d\hat{\eta}_{ik}(s) x_n(s) + \\ &+ \sum_{i=I_-+1}^I \sum_{k=1}^{K_i} A_{ik}(t) \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \int_{t_i - \tau}^{t_{i-1}} d\hat{\eta}_{ik}(s) x_n(s). \end{aligned}$$

Этот результат позволяет переписать систему уравнений (3.2.2) в форме

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{I_-} \sum_{k=1}^{K_i} A_{ik}(t) \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) f_{ik}(x_n) + \sum_{i=1}^{I_-} \sum_{k=1}^{K_i} A_{ik}(t) \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \hat{f}_{ik}(x_{n-1}) + g_n(t), \quad (3.2.4)$$

где $t \in (0, \omega]$, $n \geq 0$,

$$f_{ik}(x_n) = \int_{t_i^*}^{t_{i-1}} d\hat{\eta}_{ik}(s) x_n(s), \quad t_i^* = \max(0, t_i - \tau), \quad 1 \leq k \leq K_i, \quad 1 \leq i \leq I, \quad (3.2.5)$$

$$\hat{f}_{ik}(x_{n-1}) = \int_{t_i - \tau + \omega}^{\omega} d\hat{\eta}_{ik}(s - \omega)x_{n-1}(s) \quad 1 \leq k \leq K_i, \quad 1 \leq i \leq I_-. \quad (3.2.6)$$

Будем считать, что при каждом i ($1 \leq i \leq I$) функционалы f_{ik} , $1 \leq k \leq K_i$, линейно независимы, а также при каждом i ($1 \leq i \leq I_-$) функционалы \hat{f}_{ik} , $1 \leq k \leq K_i$, линейно независимы. В противном случае преобразуем уравнение (3.2.4), изменяя функции A_{ik} , $1 \leq k \leq K_i$, $1 \leq i \leq I$.

Введем множества $\mathcal{K}_i^+ = \{k : 1 \leq k \leq K_i, f_{ik}(x) \neq 0, x \in C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m)\}$, $1 \leq i \leq I$, $\mathcal{K}_i^- = \{k : 1 \leq k \leq K_i, \hat{f}_{ik}(x) \neq 0, x \in C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m)\}$, $1 \leq i \leq I_-$. Интегрируя (3.2.4), имеем

$$x_n(t) = x_{n-1}(\omega) + \sum_{i=1}^I \sum_{k \in \mathcal{K}_i^+} a_{ik}(t) f_{ik}(x_n) + \sum_{i=1}^{I_-} \sum_{k \in \mathcal{K}_i^-} a_{ik}(t) \hat{f}_{ik}(x_{n-1}) + \hat{g}_n(t), \quad t \in (0, \omega], \quad n \geq 0, \quad (3.2.7)$$

где введены обозначения $a_{ik}(t) = \int_0^t A_{ik}(s) \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(s) ds$, $1 \leq k \leq K_i$, $1 \leq i \leq I$, $\hat{g}_n(t) = \int_0^t g_n(s) ds$, $t \in (0, \omega]$, $n \geq 0$.

Применяя к полученным формулам преобразования (3.2.5), имеем

$$f_{pq}(x_n) = \gamma_{pq} x_{n-1}(\omega) + \sum_{i=1}^I \sum_{k \in \mathcal{K}_i^+} \alpha_{pqik} f_{ik}(x_n) + \sum_{i=1}^{I_-} \sum_{k \in \mathcal{K}_i^-} \alpha_{pqik} \hat{f}_{ik}(x_{n-1}) + \rho_{pqn}, \quad n \geq 0. \quad (3.2.8)$$

Здесь $\gamma_{pq} = \int_{t_p^*}^{t_{p-1}} d\hat{\eta}_{pq}(s) = \hat{\eta}_{pq}(t_{p-1}) - \hat{\eta}_{pq}(t_p^*)$, $\rho_{pqn} = \int_{t_p^*}^{t_{p-1}} d\hat{\eta}_{pq}(s) \hat{g}_n(s)$, $\alpha_{pqik} = \int_{t_p^*}^{t_{p-1}} d\hat{\eta}_{pq}(s) a_{ik}(s)$, $q \in \mathcal{K}_p^+$, $k \in \mathcal{K}_i^- \cup \mathcal{K}_i^+$, $1 \leq p, i \leq I$. Вычислим значения коэффициентов α_{pqik} , $q \in \mathcal{K}_p^+$, $k \in \mathcal{K}_i^- \cup \mathcal{K}_i^+$, $1 \leq p, i \leq I$, используя определения функций a_{ik} . Имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{pqik} &= \int_{t_p^*}^{t_{p-1}} d\hat{\eta}_{pq}(s) \int_0^s A_{ik}(t) \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) dt = \hat{\eta}_{pq}(t_{p-1}) a_{ik}(t_{p-1}) - \hat{\eta}_{pq}(t_p^*) a_{ik}(t_p^*) - \\ &\quad - \int_{t_p^*}^{t_{p-1}} \hat{\eta}_{pq}(t) A_{ik}(t) \chi_{(t_{i-1}, t_i]}(t) dt, \quad 1 \leq q \leq K_p, \quad 1 \leq k \leq K_i, \quad 1 \leq p, i \leq I. \end{aligned}$$

Значения индикаторных функций $\chi_{(t_{i-1}, t_i]}$ равны нулю при $0 \leq t < t_{p-1}$, $i \geq p$. Поэтому получим $\alpha_{pqik} = 0$, $q \in \mathcal{K}_p^+$, $k \in \mathcal{K}_i^- \cup \mathcal{K}_i^+$, $1 \leq p \leq i \leq I$. С учетом этого система (3.2.8) приводится к виду

$$\begin{aligned} f_{1q}(x_n) &= \gamma_{1q} x_{n-1}(\omega), \quad q \in \mathcal{K}_1^+, \\ f_{pq}(x_n) &= \gamma_{pq} x_{n-1}(\omega) + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{k \in \mathcal{K}_i^+} \alpha_{pqik} f_{ik}(x_n) + \sum_{i=1}^{I_p} \sum_{k \in \mathcal{K}_i^-} \alpha_{pqik} \hat{f}_{ik}(x_{n-1}) + \rho_{pqn}, \\ I_p &= \min(p-1, I_-), \quad q \in \mathcal{K}_p^+, \quad 2 \leq p \leq I, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Решение полученной линейной системы алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $f_{ik}(x_n)$, $k \in \mathcal{K}_i^+$, $1 \leq i \leq I$, можно найти с помощью рекуррентной процедуры. Это решение с учетом $I_1 = 0$ запишется в следующей форме

$$f_{ik}(x_n) = \hat{\gamma}_{ik}x_{n-1}(\omega) + \sum_{p=1}^{I_i} \sum_{q \in \mathcal{K}_p^-} \hat{\alpha}_{ikpq} \hat{f}_{pq}(x_{n-1}) + \hat{\rho}_{ikn}, \quad k \in \mathcal{K}_i^+, \quad 1 \leq i \leq I, \quad n \geq 0.$$

Коэффициенты этого представления определяются рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{1k} &= \gamma_{1k}, \quad k \in \mathcal{K}_1^+, \\ \hat{\gamma}_{ik} &= \gamma_{ik} + \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{q \in \mathcal{K}_p^+} \alpha_{ikpq} \hat{\gamma}_{pq}, \quad \hat{\rho}_{ikn} = \rho_{ikn} + \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{q \in \mathcal{K}_p^+} \alpha_{ikpq} \hat{\rho}_{pqn}, \\ \hat{\alpha}_{ikpq} &= \alpha_{ikpq} + \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{l \in \mathcal{K}_j^+} \alpha_{ikjl} \hat{\alpha}_{jlpq}, \quad k \in \mathcal{K}_i^+, \quad 2 \leq i \leq I. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Подставляя вычисленные значения функционалов (3.2.5) в формулу (3.2.7), получим следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Решение счетной системы функционально-дифференциальных уравнений (3.2.2) является решением разностной системы*

$$x_n(t) = A_0(t)x_{n-1}(\omega) + \sum_{i=1}^{I_-} \sum_{k \in \mathcal{K}_i^-} \hat{a}_{ik}(t) \hat{f}_{ik}(x_{n-1}) + G_n(t), \quad t \in (0, \omega], \quad n \geq 0, \quad (3.2.10)$$

в

функциональном пространстве $C((0, \omega], \mathbb{R}^m)$, в которой $A_0(t) = I_m + \sum_{i=1}^I \sum_{k \in \mathcal{K}_i^+} a_{ik}(t) \hat{\gamma}_{ik}$, $G_n(t) = \hat{g}_n(t) + \sum_{i=1}^I \sum_{k \in \mathcal{K}_i^+} a_{ik}(t) \hat{\rho}_{ikn}$, $\hat{a}_{ik}(t) = a_{ik}(t) + \sum_{p=1}^I \sum_{q \in \mathcal{K}_p^+} a_{pq}(t) \hat{\alpha}_{pqik}$, $k \in \mathcal{K}_i^-$, $1 \leq i \leq I_-$, $t \in (0, \omega]$, $x_{-1}(t) = \varphi(t - \omega)$, $t \in [\omega - \tau, \omega]$, $x_{-1}(t) = \varphi(-\tau)$, $t \in [0, \omega - \tau]$.

Решение системы (3.2.10) можно найти, зная величины $x_n(\omega)$, $\hat{f}_{ik}(x_n)$, $1 \leq k \leq K_i$, $1 \leq i \leq I_-$, $n \geq 0$.

Обозначим через y_{in} , $1 \leq i \leq m$, i -ую компоненту вектора $x_n(\omega)$, $n \geq -1$. Пусть дискретная вектор-функция $j \rightarrow (i_j \ k_j)$ задает отображение упорядоченного множества чисел $\{m+1, \dots, M\}$, $M = m + \sum_{j=1}^{I_-} \dim \mathcal{K}_j^-$, на множество пар чисел $\{(i \ k) : k \in \mathcal{K}_i^-, \ 1 \leq i \leq I_-\}$. Здесь величина $\dim \mathcal{K}_i^-$ равняется числу элементов в множестве \mathcal{K}_i^- , $1 \leq i \leq I_-$. В дальнейшем будем использовать обозначения $y_{jn} = \hat{f}_{i_j k_j}(x_{n-1})$, $m+1 \leq j \leq M$, $y_n^1 = \{y_{in}\}_{i=1}^m$, $y_n^2 = \{y_{jn}\}_{j=m+1}^M$, $n \geq -1$.

Теорема 3.4. *Решение счетной системы функционально-дифференциальных уравнений (3.2.2) определяются формулами*

$$x_n(t) = A_0(t)y_{n-1}^1 + \hat{A}(t)y_{n-1}^2 + G_n(t), \quad t \in (0, \omega], \quad n \geq 0, \quad (3.2.11)$$

в которых последовательности $\{y_n^1\}_{n=0}^\infty$, $\{y_n^2\}_{n=0}^\infty$ определяются решением системы разностных уравнений

$$\begin{aligned} y_n^1 &= A_0(\omega)y_{n-1}^1 + \hat{A}(\omega)y_{n-1}^2 + G_n(\omega), \\ y_n^2 &= \hat{\mathcal{F}}(A_0)y_{n-1}^1 + \hat{\mathcal{F}}(\hat{A})y_{n-1}^2 + \hat{\mathcal{F}}(G_n) \quad n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

с начальными условиями $y_{-1}^1 = \varphi(0)$, $y_{-1}^2 = \{\hat{f}_{i_j k_j}(x_{-1})\}_{j=m+1}^M$. Здесь $\hat{A}(t) = \{\hat{a}_{i_j k_j}(t)\}_{j=m+1}^M$, $t \in (0, \omega]$, $\hat{\mathcal{F}}(A_0) = \{\hat{f}_{i_j k_j}(A_0)\}_{j=m+1}^M$, $\hat{\mathcal{F}}(\hat{A}) = \{\hat{f}_{i_j k_j}(\hat{A})\}_{j=m+1}^M$, $\hat{\mathcal{F}}(G_n) = \{\hat{f}_{i_j k_j}(G_n)\}_{j=m+1}^M$.

Доказательство. С учетом введенных обозначений формулы (3.2.10) примут вид (3.2.11).

При $t = \omega$ имеем

$$x_n(\omega) = A_0(\omega)y_{n-1}^1 + \hat{A}(\omega)y_{n-1}^2 + G_n(\omega), \quad n \geq 0.$$

Используя преобразования (3.2.6) применительно к (3.2.11), получим

$$\hat{f}_{ik}(x_n) = \hat{f}_{ik}(A_0)y_{n-1}^1 + \hat{f}_{ik}(\hat{A})y_{n-1}^2 + \hat{f}_{ik}(G_n), \quad k \in \mathcal{K}_i^-, \quad 1 \leq i \leq I_-, \quad n \geq 0.$$

Полученная система разностных уравнений описывается формулами (2.12). \square

Пусть $y_n = ((y_n^1)^T (y_n^2)^T)^T$, тогда система (2.12) запишется в виде

$$y_n = \mathcal{A}y_{n-1} + \mathcal{G}_n, \quad n \geq 0,$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_0(\omega) & \hat{A}(\omega) \\ \hat{\mathcal{F}}(A_0) & \hat{\mathcal{F}}(\hat{A}) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}_n = \begin{pmatrix} G_n(\omega) \\ \hat{\mathcal{F}}(G_n) \end{pmatrix}.$$

§3.3. Построение стабилизирующих управлений в случае аппроксимирующих операторов

Рассмотрим управляемую линейную периодическую систему дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt} = (Fx)(t) + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \quad (3.3.1)$$

в которой линейный вольтерровый оператор F определен в разделе 1, $u \in \mathbb{R}^r$, $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times r}$ — ω -периодическая матричная функция интегрируемая на $(0, \omega]$, и аппроксимирующую ее систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = (F_I x)(t) + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.3.2)$$

в которой линейный вольтерровый оператор $F_I : C([-\tau, +\infty), \mathbb{R}^m) \rightarrow L_1^{loc}((0, +\infty], \mathbb{R}^m)$ определен в § 3.2.

С учетом специальной формы представления оператора \hat{F}_I целесообразно моделировать множество допустимых управления U периодическими кусочно-постоянными векторными функциями

$$u = \sum_{i=1}^{I'} \chi_{(t'_{i-1}, t'_i]}(t - n\omega) \hat{u}_i(x_{n\omega}(\cdot)), \quad n\omega < t \leq (n+1)\omega, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad (3.3.3)$$

определяемыми непрерывными отображениями $\hat{u}_i(\cdot) : C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^r$, $1 \leq i \leq I'$. Здесь используется новое разбиение $\Delta'_{I'} : 0 = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_{I'} = \omega$ полуинтервала $(0, \omega]$. В этом классе допустимых управлений время задержки может быть использовано для формирования управляющего сигнала по принципу обратной связи.

В множестве допустимых управлений U , формируемых по принципу обратной связи, будем искать управление u^0 , стабилизирующее систему (3.3.2) с наименьшим значением показателя качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T(t)C_1(t)x(t) + u^T(t)C_2(t)u(t)) dt, \quad (3.3.4)$$

где C_1, C_2 — ω -периодические непрерывные матричнозначные функции, значения которых являются симметрическими положительно определенными матрицами.

Для рассматриваемого класса допустимых управлений системе (3.3.2) можно поставить в соответствие счетную совокупность управляемых систем на конечном промежутке времени

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = (\hat{F}x_n)(t) + B(t)u_n(t), \quad t \in (0, \omega], \quad (3.3.5)$$

где $u_n(t) = u(t, x_{t+n\omega}(\cdot))$, $n \geq 0$. Критерий качества (3.3.4) для (3.3.5) переписется в форме

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\omega} (x_n^T(t)C_1(t)x_n(t) + u_n^T(t)C_2(t)u_n(t)) dt, \quad t \in (0, \omega]. \quad (3.3.6)$$

От полученной задачи стабилизации на конечном промежутке времени перейдем к аппроксимирующей ее задаче

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = (\hat{F}_I x)(t) + B(t)u_n(t), \quad t \in (0, \omega], \quad n \geq 0, \quad (3.3.7)$$

в которой линейный вольтерровый оператор \hat{F}_I определен в разделе 2. Критерий качества в аппроксимирующей задаче оставим без изменения в виде (3.3.6).

Тогда (3.3.7) запишется в виде

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = (\hat{F}_I x)(t) + B(t) \sum_{i=1}^{I'} \chi_{[t_{i-1}, t_i]}(t) \hat{u}_{ni}, \quad t \in (0, \omega], \quad n \geq 0, \quad (3.3.8)$$

где $\hat{u}_{ni} = \hat{u}_i(x_{n\omega}(\cdot))$.

Теорема 3.1 позволяет свести задачу стабилизации (3.3.8), (3.3.6) к задаче оптимальной стабилизации разностной системы

$$x_n(t) = A_0(t)x_{n-1}(\omega) + \sum_{i=1}^{I-} \sum_{k=1}^{K_i} \hat{a}_{ik}(t) \hat{f}_{ik}(x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{I'} \hat{b}_i(t) \hat{u}_{ni}, \quad n \geq 0,$$

в функциональном пространстве $C((0, \omega], \mathbb{R}^m)$ с критерием качества (3.3.6). Здесь $G_n(t) = \sum_{i=1}^{I'} \hat{b}_i(t) \hat{u}_{ni}$, $n \geq 0$, функции \hat{b}_i , $1 \leq i \leq I'$, определяются в виде $\hat{b}_i(t) = b_i(t) + \sum_{p=1}^I \sum_{q \in \mathcal{K}_p^+} a_{pq}(t) \hat{\beta}_{pqi}$, а коэффициенты $\hat{\beta}_{pqi}$, в свою очередь, — рекуррентными формулами (3.2.9), которые в данном случае запишутся как $\hat{\beta}_{pqi} = \beta_{pqi} + \sum_{j=1}^I \sum_{l \in \mathcal{K}_j^+} \alpha_{pqjl} \hat{\beta}_{jli}$. Здесь $b_i(t) = \int_0^t B(s) \chi_{(t_{i-1}^-, t_i]}(s) ds$, $\beta_{pqi} = \int_{t_p^*}^{t_{p-1}^*} d\hat{\eta}_{pq}(s) b_i(s)$, $q \in \mathcal{K}_p^+$, $1 \leq p \leq I$, $1 \leq i \leq I'$.

Теорема 3.4 позволяет свести задачу (3.3.8), (3.3.6) к задаче оптимальной стабилизации разностной системы

$$y_n = \mathcal{A}y_{n-1} + \mathcal{B}\hat{u}_n, \quad n \geq 0, \quad \hat{u}_n = (\hat{u}_{n1}^T, \dots, \hat{u}_{nI'}^T)^T, \quad (3.3.9)$$

с критерием качества

$$J = \sum_{n=0}^{+\infty} (y_{n-1}^T \mathcal{J}_1 y_{n-1} + y_{n-1}^T \mathcal{J}_2 \hat{u}_n + \hat{u}_n^T \mathcal{J}_2^T y_{n-1} + \hat{u}_n^T \mathcal{J}_3 \hat{u}_n). \quad (3.3.10)$$

Здесь $\mathcal{B} = (\hat{B}^T(\omega) \hat{\mathcal{F}}^T(\hat{B}))^T$, матричнозначная функция \hat{B} определяется формулой $\hat{B}(t) = \{\hat{b}_i(t)\}_1^{I'}$,

$$\hat{\mathcal{F}}(\hat{B}) = \{\hat{f}_{i_j k_j}(\hat{B})\}_{j=m+1}^M, \quad \mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^T & \Gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{13} \\ \Gamma_{23} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_3 = \Gamma_3,$$

$\Gamma_1 = \int_0^\omega A_0^T(t) C_1(t) A_0(t) dt$, $\Gamma_{12} = \int_0^\omega A_0^T(t) C_1(t) \hat{A}(t) dt$, $\Gamma_2 = \int_0^\omega \hat{A}^T(t) C_1(t) \hat{A}(t) dt$, $\Gamma_{13} = \int_0^\omega A_0^T(t) C_1(t) \hat{B}(t) dt$, $\Gamma_{23} = \int_0^\omega \hat{A}^T(t) C_1(t) \hat{B}(t) dt$, $\Gamma_3 = \int_0^\omega \hat{B}^T(t) C_1(t) \hat{B}(t) dt + \Gamma_{3u}$, $\Gamma_{3u} = \text{diag}(\int_{t_0}^{t_1} C_2(t) dt, \dots, \int_{t_{I'-1}}^{t_{I'}} C_2(t) dt)$ — блочно-диагональная матрица размерности $rI' \times rI'$.

Теорема 3.5. Пусть операторы \hat{F}_I сильно сходятся к непрерывному оператору \hat{F} : $C([-\tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_2((0, \omega], \mathbb{R}^m)$ и для дискретной задачи оптимальной стабилизации (3.3.9), (3.3.10) при достаточно большом I существуют оптимальные стабилизирующие управления, принадлежащие классу допустимых функций (3.3.3). Тогда существует I такое, что стабилизирующие управления для системы (3.3.1) определяются формулами

$$u(t, x_{n\omega}(\cdot)) = \sum_{i=1}^{I'} \chi_{(t_{i-1}^-, t_i]}(t - n\omega) \hat{u}_{ni} \left(x(n\omega), \int_{t_{i_{m+1}}^{-\tau}}^0 d\eta_{i_{m+1}k_{m+1}}(s) x(n\omega + s), \dots, \int_{t_{i_M}^{-\tau}}^0 d\eta_{i_M k_M}(s) x(n\omega + s) \right), \quad (3.3.11)$$

$n\omega < t \leq (n+1)\omega$, $n \geq 0$.

Доказательство. На полуинтервале $(0, \omega]$ решения управляемых систем (3.3.1) и (3.3.2), порождаемые управлениями (3.3.11) определяются уравнениями

$$\frac{dx(t)}{dt} = (\hat{F}x)(t) + B(t)u(t, \varphi(\cdot)), \quad (3.3.12)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = (\hat{F}_I x)(t) + B(t)u(t, \varphi(\cdot)), \quad \varphi \in C([- \omega, 0], \mathbb{R}^m). \quad (3.3.13)$$

Согласно теореме Банаха-Штейнгауза [69, с.271] нормы операторов \hat{F}_I , $I \geq 1$, равномерно ограничены. Тогда при выбранном управлении $u(t, \varphi(\cdot))$ нормы решений уравнения (3.3.12) $\|x_I(\cdot, \varphi)\|_C = \max_{t \in [0, \omega]} |x_I(t, \varphi)|$, $I \geq 1$, равномерно ограничены.

Для решений $x(t, \varphi)$, $x_I(t, \varphi)$, $t \in [0, \omega]$, уравнений (3.3.12) и (3.3.13) соответственно, имеет место равенство

$$x(t, \varphi) - x_I(t, \varphi) = \int_0^t V(t, s) \left((\hat{F} - \hat{F}_I) x_I(\cdot, \varphi) \right) (s) ds, \quad t \in [0, \omega], \quad (3.3.14)$$

где V — матрица Коши системы (3.3.12) [108, с.180].

Пусть $U : C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m) \rightarrow C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m)$, $U_I : C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m) \rightarrow C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m)$ — операторы монодромии систем (3.3.12) и (3.3.13) соответственно. Управление (3.3.11) стабилизирует системы (3.3.1) и (3.3.2), если радиусы спектров их операторов монодромии меньше единицы [108, 111, с.233]. Из (3.3.14) находим связь операторов монодромии

$$((U - U_I) \varphi) (\vartheta) = \int_{-\omega}^{\vartheta} V(\omega + \vartheta, \omega + s) \left((\hat{F} - \hat{F}_I) x_I(\cdot, \varphi) \right) (\omega + s) ds, \quad \vartheta \in [-\omega, 0]. \quad (3.3.15)$$

Оператор $W : L_2([- \omega, 0], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_2([- \omega, 0], \mathbb{R}^m)$, определяемый формулой $(Wy)(\vartheta) = \int_{-\omega}^{\vartheta} V(\omega + \vartheta, \omega + s)y(s)ds$, $\vartheta \in [-\omega, 0]$, является оператором Гильберта-Шмидта [49, с.141]. Тогда операторы $W\hat{F}_I : C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_2([- \omega, 0], \mathbb{R}^m)$ сходятся при $I \rightarrow +\infty$ к оператору $W\hat{F} : C([- \tau, \omega], \mathbb{R}^m) \rightarrow L_2([- \omega, 0], \mathbb{R}^m)$ в топологии идеала операторов Гильберта-Шмидта [49, с.119]. Отсюда следует, что собственные числа оператора U_I при $I \rightarrow +\infty$ сходятся к собственным числам оператора U [53, с. 253]. \square

Теорема 3.5 позволяет использовать известные методы оптимальной стабилизации автономных дискретных систем [71, 106] при нахождении стабилизирующего управления линейной периодической системы дифференциальных уравнений с последствием.

Решение задачи оптимальной стабилизации (3.3.9), (3.3.10) сопряжено с решением дискретного уравнения Риккати [71, 106]

$$\tilde{A}^T P \tilde{A} - P + \tilde{J}_1 - (\tilde{A}^T P B)(B^T P B + \mathcal{J}_3)^{-1}(B^T P \tilde{A}) = 0, \quad (3.3.16)$$

где P — искомая положительно определенная симметричная матрица, $\tilde{A} = A - B\mathcal{J}_3^{-1}\mathcal{J}_2^T$, $\tilde{\mathcal{J}}_1 = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2\mathcal{J}_3^{-1}\mathcal{J}_2^T$. В работах [20, 68] предложена специальная процедура решения дискретного уравнения Риккати. Оптимальные стабилизирующие управления в дискретной задаче связано с решением (3.3.16) формулой

$$\hat{u}_n^0 = - \left((B^T P B + \mathcal{J}_3)^{-1} B^T P \tilde{A} + \mathcal{J}_3^{-1} \mathcal{J}_2^T \right) y_n. \quad (3.3.17)$$

§3.4. Задача стабилизации скалярного периодического дифференциального уравнения с сосредоточенным запаздыванием

Рассмотрим управляемые движения, определяемые дифференциальным уравнением с сосредоточенным запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_0(t)x(t) + a_1(t)x(t - \tau_1) + b(t)u, \quad (3.4.1)$$

в котором $x : [-\tau_1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, $a_0(t)$, $a_1(t)$, $b(t)$ — действительные ω -периодические функции, интегрируемые по Лебегу на $(0, \omega]$, $0 < \tau_1 \leq \omega$. Здесь $\eta(t, 0) = 0$, $\eta(t, \vartheta) = -a_0(t)$, $-\tau_1 < t < 0$, $\eta(t, -\tau_1) = -a_0(t) - a_1(t)$, $t > 0$.

Зададимся некоторым разбиением Δ_I полуинтервала $(0, \omega]$ и рассмотрим аппроксимирующие операторы, определяемые формулами

$$(\hat{F}_I x)(t) = a_0(t)x(t_{i-1}) + a_1(t) \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} x(s - \tau_1) ds, \quad t_{i-1} < t \leq t_i, \quad i = 1, \dots, I.$$

Аппроксимирующие операторы можно описать в форме (3.1.2), где $A_{i1}(t) = a_0(t)$, $A_{i2}(t) = a_1(t)$,

$$\hat{\eta}_{i1}(s) = \begin{cases} 0, & s \geq t_{i-1}, \\ -1, & s < t_{i-1}, \end{cases} \quad \hat{\eta}_{i2}(s) = \begin{cases} 0, & s \geq t_i - \tau_1, \\ \frac{s - t_i + \tau_1}{t_i - t_{i-1}}, & t_{i-1} - \tau_1 \leq s < t_i - \tau_1, \\ -1, & s < t_{i-1} - \tau_1. \end{cases}$$

При оценке качества переходных процессов аппроксимирующих уравнений используется функционал

$$J = \int_0^{+\infty} (c_1(t)x^2(t) + c_2(t)u^2) dt,$$

где c_1 , c_2 — непрерывные положительные ω -периодические функции.

Предложенная процедура сведения аппроксимирующей задачи стабилизации к задаче оптимальной стабилизации автономной дискретной системы конструктивна. Она реализована для уравнения (3.4.1) при следующих исходных данных: $a_0(t) = 0.05 \sin(t) - 0.9$,

$a_1(t) = 0.2 \cos(t) + 1$, $b(t) = 1$, $\tau_1 = 2.3$, $\varphi(t) = t^2$, $c_1(t) = c_2(t) = 1$ и равномерных разбиений Δ_{10} и Δ'_3 полуинтервала $(0, 2\pi]$. Коэффициенты дискретной задачи оптимальной стабилизации для линейной автономной системы разностных уравнений (3.3.16) определяются следующим образом

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0.386033 & 0.332456 & 0.273658 & 0.180998 & 0.241946 \\ 0.201415 & 0.250559 & 0.36211 & 0.243847 & 0.0819972 \\ 0.210859 & 0.201066 & 0.264866 & 0.346735 & 0.20728 \\ 0.290179 & 0.254476 & 0.198153 & 0.266343 & 0.335494 \\ 0.235763 & 0.226264 & 0.158826 & 0.124121 & 0.182562 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0.834138 & 0.989637 & 0.997198 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0199977 & -0.0746613 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} 0.746999 & 0.591858 & 0.368403 & 0.285251 & 0.286765 \\ 0.591858 & 0.65577 & 0.448311 & 0.291284 & 0.247916 \\ 0.368403 & 0.448311 & 0.539244 & 0.356382 & 0.220411 \\ 0.285251 & 0.291284 & 0.356382 & 0.431656 & 0.27706 \\ 0.286765 & 0.247916 & 0.220411 & 0.27706 & 0.332032 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} 1.23769 & 0.837888 & 0.398694 \\ 1.35267 & 0.83279 & 0.377823 \\ 1.31929 & 0.710422 & 0.339484 \\ 1.13255 & 0.633624 & 0.376502 \\ 0.831035 & 0.679081 & 0.386426 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_3 = \begin{pmatrix} 5.93682 & 2.2619 & 1.17368 \\ 2.2619 & 4.4688 & 1.04984 \\ 1.17368 & 1.04984 & 3.24061 \end{pmatrix},$$

а ее решение (3.3.17) — в виде

$$\hat{u}_n^0 = \begin{pmatrix} -0.182057 & -0.207184 & -0.214512 & -0.177428 & -0.105779 \\ -0.151084 & -0.136132 & -0.109794 & -0.0936062 & -0.128262 \\ -0.139255 & -0.120345 & -0.120982 & -0.128186 & -0.129788 \end{pmatrix} y_{n-1}.$$

Используя теорему 3.5, получим управление, стабилизирующее уравнение (3.4.1)

$$u(t, x_{n\omega}(\cdot)) = \left\{ \begin{array}{l} -0.182057x(2\pi n) - 0.329744 \int_{3.98319}^{4.6115} x(2\pi(n-1)+s) ds - 0.341406 \int_{4.6115}^{5.23982} x(2\pi(n-1)+s) ds - \\ -0.282385 \int_{5.23982}^{5.86814} x(2\pi(n-1)+s) ds - 0.168353 \int_{5.86814}^{2\pi} x(2\pi(n-1)+s) ds, \quad 2\pi(n-1) < t \leq 2\pi\left(n - \frac{2}{3}\right), \\ -0.151084x(2\pi n) - 0.216661 \int_{3.98319}^{4.6115} x(2\pi(n-1)+s) ds - 0.174743 \int_{4.6115}^{5.23982} x(2\pi(n-1)+s) ds - \\ -0.148979 \int_{5.23982}^{5.86814} x(2\pi(n-1)+s) ds - 0.204135 \int_{5.86814}^{2\pi} x(2\pi(n-1)+s) ds, \quad 2\pi\left(n - \frac{2}{3}\right) < t \leq 2\pi\left(n - \frac{1}{3}\right), \\ -0.139255x(2\pi n) - 0.191535 \int_{3.98319}^{4.6115} x(2\pi(n-1)+s) ds - 0.192549 \int_{4.6115}^{5.23982} x(2\pi(n-1)+s) ds - \\ -0.204014 \int_{5.23982}^{5.86814} x(2\pi(n-1)+s) ds - 0.206564 \int_{5.86814}^{2\pi} x(2\pi(n-1)+s) ds, \quad 2\pi\left(n - \frac{1}{3}\right) < t \leq 2\pi n. \end{array} \right.$$

Поведение стабилизированного решения продемонстрировано на рис. 3.15.

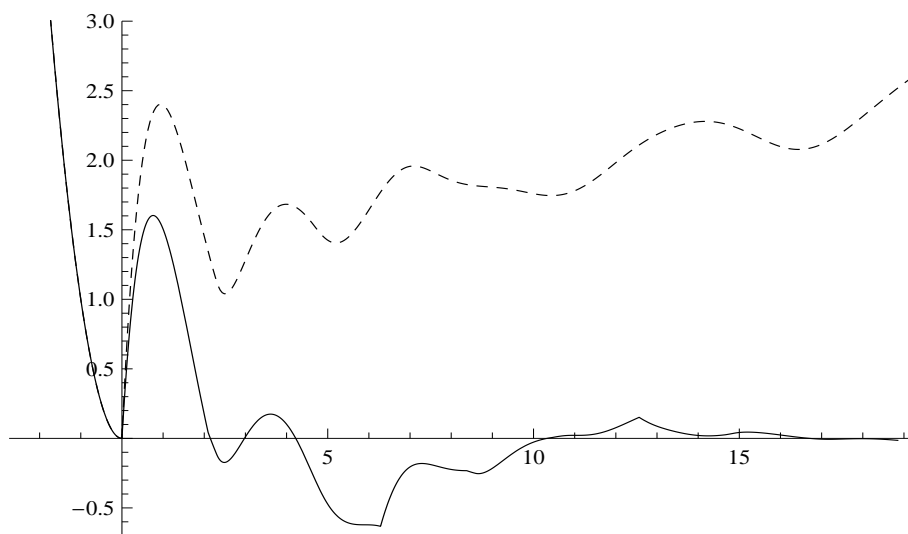


Рис. 3.15. Поведение стабилизируемого (сплошной линией) и не стабилизируемого (пунктиром) решения уравнения (3.4.1)

ГЛАВА 4. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС PCASTAB ДЛЯ WOLFRAM MATHEMATICA 8.0

§4.1. Назначение, базовые принципы организации работы и состав программного комплекса

В этом разделе мы опишем программный комплекс, предлагаемый автором для решения задач стабилизации линейных ((1.1.1), (1.1.2)) и нелинейных ((1.3.1), (1.3.2)) систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами, а также линейных периодических конечномерных ((2.3.1), (2.3.2)), либо конечномерных аппроксимирующих ((3.3.2), (3.3.4)) систем дифференциальных уравнений с последствием ([83]).

Программный комплекс имеет название PCAStab для Wolfram Mathematica 8.0 и выполнен средствами Wolfram Mathematica 8.0 и Microsoft Visual C# с использованием .NET интерфейса, реализованного в библиотеке Wolfram.NETLink.dll из состава Wolfram Mathematica 8.0 [24, с.709]. Такой подход позволил сохранить при работе в программном комплексе синтаксис, используемый в пакете Wolfram Mathematica 8.0 [31, 56].

Корректная работа программного комплекса требует наличия предустановленного пакета Wolfram Mathematica 8.0 на ЭВМ пользователя. На функционирование программного комплекса накладываются ограничения, соответствующие ограничениям пакета Wolfram Mathematica 8.0, в частности установочный путь программного комплекса не должен содержать кириллических символов.

Программный комплекс состоит из следующих элементов:

1. Модуль Wolfram Mathematica 8.0 «PCANewtonMethodPC.m» содержит реализацию математического аппарата для решения задач стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.1.1), (1.1.2) методом Ньютона, изложенного в § 1.4;
2. Программа «Метод Ньютона» содержит реализацию пользовательского интерфейса для решения задач стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.1.1), (1.1.2) методом Ньютона. В своей работе использует процедуры модуля «PCANewtonMethodPC.m»;
3. Модуль Wolfram Mathematica 8.0 «PCAQRAlgorithmPC.m» содержит реализацию математического аппарата для решения задач стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.1.1), (1.1.2) методом приведения к устойчивой форме Шура, изложенного в § 1.5;

4. Программа «QR алгоритм» содержит реализацию пользовательского интерфейса для решения задач стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.1.1), (1.1.2) методом приведения к устойчивой форме Шура. В своей работе использует процедуры модуля «PCQRAlgorithmPC.m»;
5. Модуль Wolfram Mathematica 8.0 «PCANomotopyMethodPC.m» содержит реализацию математического аппарата для решения задач стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.1.1), (1.1.2) методом продолжения по параметру, изложенного в § 1.6;
6. Программа «Метод малых деформаций» содержит реализацию пользовательского интерфейса для решения задач стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.1.1), (1.1.2) методом продолжения по параметру. В своей работе использует процедуры модуля «PCANomotopyMethodPC.m»;
7. Модуль Wolfram Mathematica 8.0 «PCAFactorizationMethodPC.m» содержит реализацию математического аппарата для решения задач стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.1.1), (1.1.2) в случае скалярного управления методом факторизации, изложенного в § 1.7;
8. Программа «Метод факторизации характеристического уравнения» содержит реализацию пользовательского интерфейса для решения задач стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.1.1), (1.1.2) в случае скалярного управления методом факторизации. В своей работе использует процедуры модуля «PCAFactorizationMethodPC.m»;
9. Модуль Wolfram Mathematica 8.0 «NLPStabAlgorithmPC.m» содержит реализацию математического аппарата для решения задач стабилизации нелинейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.3.1), (1.3.2) в соответствии с методом, изложенным в § 1.8;
10. Программа «Стабилизация нелинейных систем с КПА» содержит реализацию пользовательского интерфейса для решения задач стабилизации нелинейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.3.1), (1.3.2). В своей работе использует процедуры модуля «NLPStabAlgorithmPC.m»;
11. Модуль Wolfram Mathematica 8.0 «FOStabAlgorithmPC.m» содержит реализацию математического аппарата для решения задач стабилизации линейных периодических конечномерных систем дифференциальных уравнений с последствием

(2.3.1), (2.3.2), в соответствии с методом, изложенным в §§ 2.5, 2.6. Здесь методом оптимальной стабилизации в эквивалентной дискретной задаче является метод приведения к устойчивой форме Шура;

12. Программа «Линейная периодическая конечномерная система» содержит реализацию пользовательского интерфейса для решения задач стабилизации линейных периодических конечномерных систем дифференциальных уравнений с последствием (2.3.1), (2.3.2). В своей работе использует процедуры модуля «FOStabAlgorithmPC.m»;
13. Модуль Wolfram Mathematica 8.0 «AFOStabAlgorithmPC.m» содержит реализацию математического аппарата для решения задач стабилизации конечномерных аппроксимирующих периодических систем дифференциальных уравнений с последствием (3.3.2), (3.3.4), в соответствии с методом, изложенным в § 2.8. Здесь методом оптимальной стабилизации в эквивалентной дискретной задаче является метод приведения к устойчивой форме Шура;
14. Программа «Аппроксимирующая линейная периодическая конечномерная система» содержит реализацию пользовательского интерфейса для решения задач стабилизации конечномерных аппроксимирующих периодических систем дифференциальных уравнений с последствием (3.3.2), (3.3.4). В своей работе использует процедуры модуля «AFOStabAlgorithmPC.m».

Следует отметить, что все задачи, реализованные в программном комплексе, выполнены с дублированием общих математических процедур и, следовательно, являются независимыми друг от друга. Задачи, реализованные в программном комплексе, сгруппированы по назначению. Предложенная архитектура программного комплекса позволила реализовать два различных способа его применения: средствами графического интерфейса взаимодействия с пользователем и средствами консоли пакета Wolfram Mathematica 8.0. Далее остановимся на обозначенных способах использования программного комплекса более подробно.

§4.2. Использование программного комплекса средствами графического интерфейса взаимодействия с пользователем

На рисунке 4.16 представлен интерфейс меню выбора группы решаемых задач. Пользователю предлагается указать тип решаемой им задачи: задача стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументам вида (1.1.1),

(1.1.2); одна из задач стабилизации линейных периодических конечномерных систем дифференциальных уравнений с последействием вида (2.3.1), (2.3.2) или конечномерных аппроксимирующих систем дифференциальных уравнений с последействием вида (3.3.2), (3.3.4); задача стабилизации нелинейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами вида (1.3.1), (1.3.2).

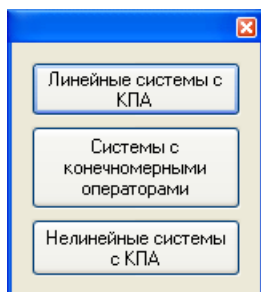


Рис. 4.16. Меню выбора группы решаемых задач

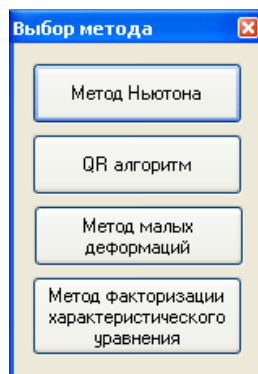


Рис. 4.17. Меню выбора метода решения задачи (1.1.1)

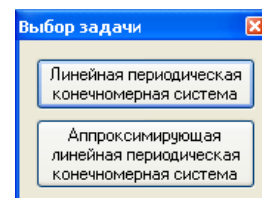


Рис. 4.18. Меню выбора решаемой задачи (2.3.1), (2.3.2) или (3.3.2), (3.3.4)

В первом случае осуществляется переход к меню выбора метода решения задачи стабилизации линейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументам (1.1.1), (1.1.2), представленного на рисунке 4.17. Для выбора предлагается один из четырех методов, рассмотренных в §§1.2 — 1.4. При выборе какого-либо пункта данного меню осуществляется обращение к соответствующей программе.

Выбор пункта меню «Метод Ньютона» приводит к обращению к программе «Метод Ньютона» и открытию графического окна, представленного на рисунке 4.19. Пользователю предоставляется возможность установить значения параметров задачи и ввести коэффициенты задачи:

1. Указать задается ли параметр $A^o(t)$ системы (1.1.1) или он полагается равным 0;
2. Указать решается ли задача с учетом начальных условий или без них;
3. Задать значение параметра l , определяющего старший запаздывающий аргумент $[t - l]$, в системе (1.1.1);
4. Установить размерность задачи m ;
5. Установить размерность вектора управления r ;
6. Ввести матрицу $A^o(t)$ установленного размера $m \times m$ при указании признака п. 1;
7. Ввести матрицы $A_k(t)$, $k = 0, \dots, l$, установленного размера $m \times m$;
8. Ввести матрицу $B(t)$ установленного размера $m \times r$;

9. Ввести матрицу $D_x(t)$ установленного размера $m \times m$;
10. Ввести матрицу $D_u(t)$ установленного размера $r \times r$;
11. Ввести l начальных условий в виде векторов, определяющих значения $x(0), x(-1), \dots, x(-l)$, при указании признака п. 2.

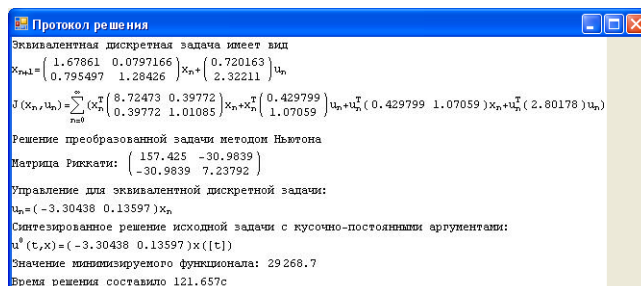
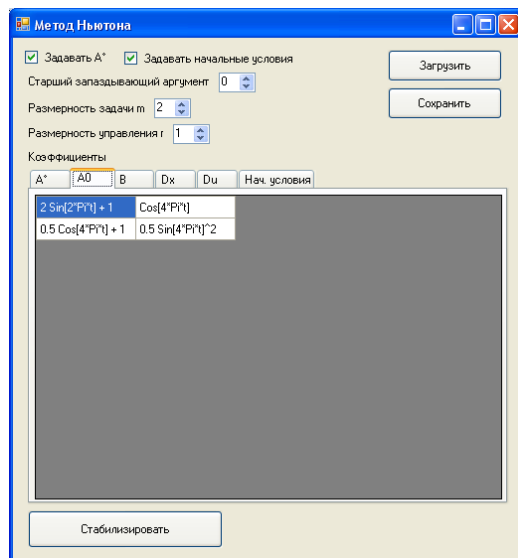


Рис. 4.20. Протокол решения задачи программой «Метод Ньютона»

Рис. 4.19. Интерфейс программы «Метод Ньютона»

Введенные исходные данные можно экспортировать в память ЭВМ, или наоборот импортировать из памяти ЭВМ. Экспортируемые файлы имеют расширение .nb и соответствуют файлам пакета Wolfram Mathematica 8.0, что позволяет при необходимости осуществлять их редактирование средствами пакета Wolfram Mathematica 8.0. Следует отметить, что формат файлов, создаваемых программным комплексом, содержит специальные метки, предотвращающие некорректное импортирование файлов, не относящихся к программному комплексу PCAStab для Wolfram Mathematica 8.0, либо относящихся к типам задач комплекса, отличным от выбранного.

Решение задачи осуществляется нажатием кнопки «Стабилизировать». Основным результатом работы программы является протокол решения задачи. Для программы «Метод Ньютона» протокол решения в общем случае содержит:

1. Эквивалентную дискретную задачу оптимальной стабилизации системы разностных уравнений (1.1.15) с критерием качества (1.1.17), получаемую применением теоремы 1.1;
2. Построенное решение уравнения Риккати (1.1.23);
3. Оптимальное управление (1.1.22) в эквивалентной дискретной задаче, соответствующее найденному решению уравнения Риккати;

4. Восстановленное управление для поставленной задачи стабилизации системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами;
5. Время решения задачи (в секундах).

В случае, если пользователем были заданы начальные условия, протокол решения задачи также будет содержать значение минимизируемого функционала. Также в этом случае будут дополнительно построены графики стабилизируемого решения (рисунок 4.21) и полученного стабилизирующего управления (рисунок 4.22). Здесь при размерности $m < 3$ осуществляется построение графика решения поэлементно, в противном случае — строится график $|x(t)|$.

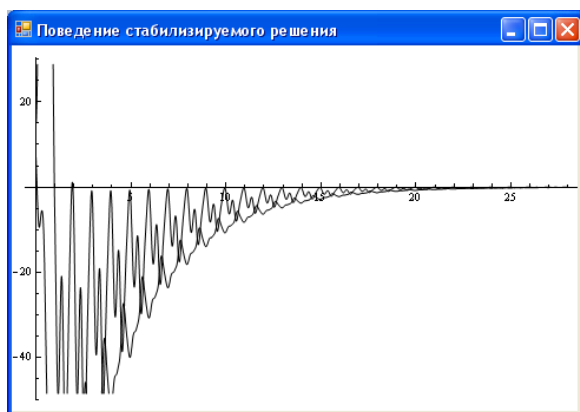


Рис. 4.21. Демонстрация графика стабилизируемого решения программой «Метод Ньютона»

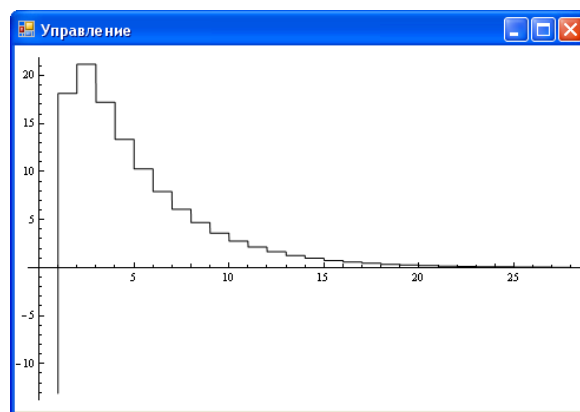


Рис. 4.22. Демонстрация графика стабилизирующего управления программой «Метод Ньютона»

Следует отметить, что для удобства пользователя интерфейсы всех программ для решения задач вида (1.1.1), (1.1.2) максимально унифицированы. Далее остановимся лишь на возникающих между ними отличиях.

Интерфейс программы «QR алгоритм» в части ввода исходных данных не отличается от аналогичного интерфейса программы «Метод Ньютона». Пример его протокола решения задачи приведен на рисунке 4.23. Дополнительно к протоколу программы «Метод Ньютона» он содержит постановку эквивалентной задачи оптимальной стабилизации системы разностных уравнений (1.1.19) с критерием качества (1.1.20), получаемую применением следствия 1.1 к теореме 1.1, и замену управления (1.1.21), приводящую к ней; формируемую матрицу \mathcal{M} специального вида, ее неустойчивую и устойчивую формы Шура; блочные элементы U_{11} и U_{21} матричного преобразования U , приводящей \mathcal{M} к устойчивой форме Шура.

```

Протокол решения
Эквивалентная дискретная задача имеет вид
 $x_{n+1} = \begin{pmatrix} 1.67861 & 0.0797166 \\ 0.795497 & 1.28426 \end{pmatrix} x_n + \begin{pmatrix} 0.720163 \\ 2.32211 \end{pmatrix} u_n$ 
 $J(x_n, u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n^T \begin{pmatrix} 8.72473 & 0.39772 \\ 0.39772 & 1.01085 \end{pmatrix} x_n + u_n^T \begin{pmatrix} 0.429799 \\ 1.07059 \end{pmatrix} x_n + u_n^T (2.80178) u_n)$ 
Замена управления  $\tilde{u}_n = u_n - (-0.153402 \ -0.38211) x_n$  преобразует задачу к виду
 $x_{n+1} = \begin{pmatrix} 1.56813 & -0.195465 \\ 0.43928 & 0.396958 \end{pmatrix} x_n + \begin{pmatrix} 0.720163 \\ 2.32211 \end{pmatrix} \tilde{u}_n$ 
 $J(x_n, \tilde{u}_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n^T \begin{pmatrix} 8.6588 & 0.233489 \\ 0.233489 & 0.601771 \end{pmatrix} x_n + \tilde{u}_n^T (2.80178) \tilde{u}_n)$ 
Решение задачи методом QR шагов
Матрица M, сформированная для разложения Шура, имеет вид
 $\begin{pmatrix} 4.17421 & 0.59328 & -0.268439 & -1.20655 \\ 8.84237 & 2.94021 & -0.865561 & -3.89044 \\ -4.70759 & 0.242339 & 0.5604 & -0.620148 \\ -2.90625 & -1.39663 & 0.275945 & 2.21379 \end{pmatrix}$ 
Верхняя форма Шура, соответствующая матрице M:
 $\begin{pmatrix} 7.68907 & -0.731494 & 9.03132 & 1.62377 \\ 0. & 1.30063 & -3.56912 & 1.18813 \\ 0. & 0. & 0.768861 & 0.0731451 \\ 0. & 0. & 0. & 0.130055 \end{pmatrix}$ 
Верхняя устойчивая форма Шура:
 $\begin{pmatrix} 0.130055 & -0.811912 & -2.14502 & 0.725952 \\ 0 & 0.768861 & 1.21939 & -5.06852 \\ 0 & 0 & 1.30063 & 8.1196 \\ 0 & 0 & 0 & 7.68907 \end{pmatrix}$ 
Элементы базисной матрицы устойчивого подпространства:
 $\tilde{U}_{11} = \begin{pmatrix} 0.0732546 & 0.10874 \\ 0.342747 & 0.565002 \end{pmatrix}$ 
 $\tilde{U}_{21} = \begin{pmatrix} 0.912476 & -0.387553 \\ 0.211059 & 0.720244 \end{pmatrix}$ 
Матрица Риккати:  $\begin{pmatrix} 157.425 & -30.9839 \\ -30.9839 & 7.23792 \end{pmatrix}$ 
Невязка решения уравнения Риккати:  $9.36046 \times 10^{-11}$ 
Синтезированное управление для преобразованной дискретной задачи:
 $u_n^0 = (-3.15098 \ 0.51808) x_n$ 
Восстановленное управление для эквивалентной дискретной задачи:
 $u_n = (-3.30438 \ 0.13597) x_n$ 
Синтезированное решение исходной задачи с кусочно-постоянными аргументами:
 $u^0(t, x) = (-3.30438 \ 0.13597) x([t])$ 
Значение минимизируемого функционала: 29268.7
Время решения составило 121.469с

```

Рис. 4.23. Пример протокола решения задачи программой «QR алгоритм»

В отличие от предыдущих программ интерфейс ввода данных в программе «Метод малых деформаций» (рисунок 4.24) дополнительно содержит поле установки параметра $\bar{\mu}$, определяющего шаг интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2.35) или ее аналога (1.2.38), а также поле для выбора метода интегрирования (Рунге-Кутты 4-го порядка или Ньютона с пересчетом соответственно).

Протокол решения задачи программы «Метод малых деформаций» содержит следующие элементы (рисунок 4.25):

1. Постановки эквивалентны дискретных задач (1.1.15), (1.1.17) и (1.1.19), (1.1.20) со связывающей их заменой управления (1.1.21);
2. Промежуточные значения матрицы Риккати $P(\mu)$ при решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2.35) или коэффициента усиления $K(\mu)$ при решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2.38);
3. Искомое значение матрицы Риккати при $\mu = 1$;
4. Оптимальные стабилизирующие управления эквивалентных задач (1.1.22), (1.1.25), а также восстановленное искомое стабилизирующее управление исходной задачи;
5. Невязку решения задачи в соответствии с определением §1.3;

6. Значение минимизируемого функционала при известных начальных условиях;
7. Время решения задачи (в секундах).

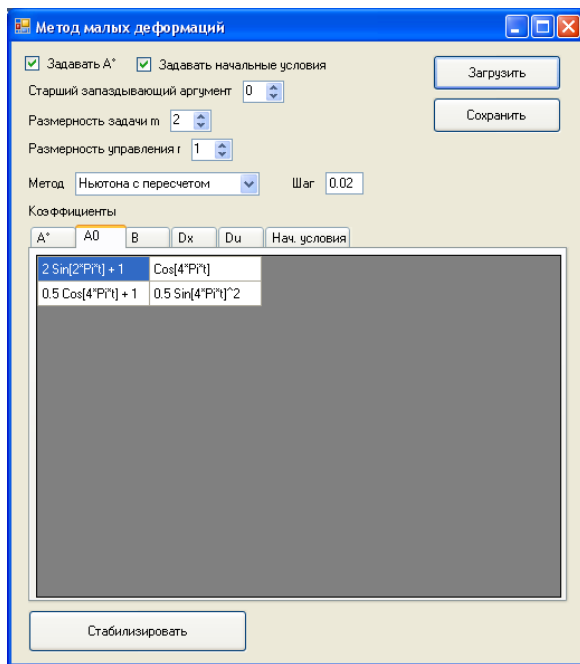


Рис. 4.24. Интерфейс ввода исходных данных программы «Метод малых деформаций»

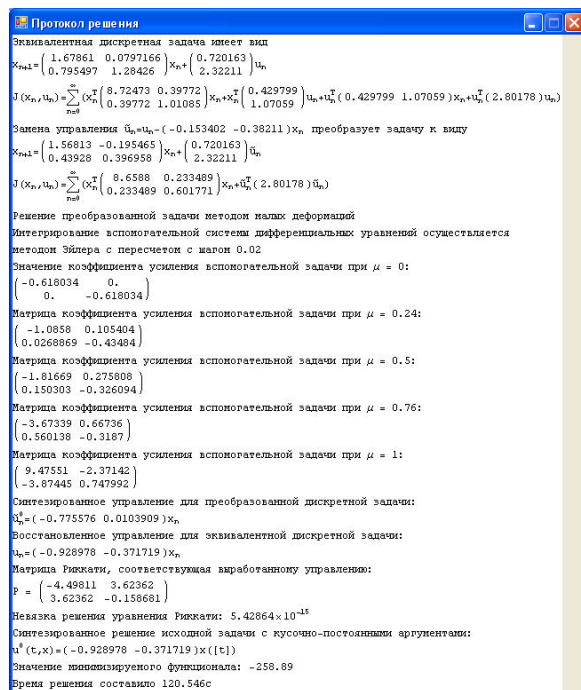


Рис. 4.25. Пример протокола решения задачи программой «Метод малых деформаций»

Так как в основе программы «Метод малых деформаций» лежит пошаговый алгоритм вычисления матрицы Риккати $P(\mu)$, невязка решения вспомогательного уравнения Риккати (1.2.34) может быть вычислена для любой точки разбиения полуинтервала $(0, 1]$, определяемого выбранным шагом $\bar{\mu}$. С учетом этого в программе «Метод малых деформаций» реализовано формирование графика невязки решения задачи на интервале $[0, 1]$, представленного на рисунке 4.26.

Единственным отличием интерфейса ввода исходных данных программы «Метод факторизации характеристического уравнения» от интерфейсов программ, рассмотренных выше, является отсутствие поля для задания размерности управления r , так как на используемый данной программой метод накладывается ограничение $r = 1$.

Протокол решения задачи программы «Метод факторизации характеристического уравнения» кроме постановок эквивалентны дискретных задач (1.1.15), (1.1.17) и (1.1.19), (1.1.20), получаемых с помощью теоремы 1.1 и ее следствия 1.1, содержит матрицу вспомогательной линейной системы разностных уравнений (1.2.43) с вычисленными устойчивыми собственными значениями ее характеристического уравнения, найденные оптимальные

стабилизирующие управления для эквивалентных дискретных задач и восстановленное стабилизирующее управление для исходной задачи, а также вычисленное значение минимизируемого критерия качества (в случае задания начальных условий) и время решения задачи.

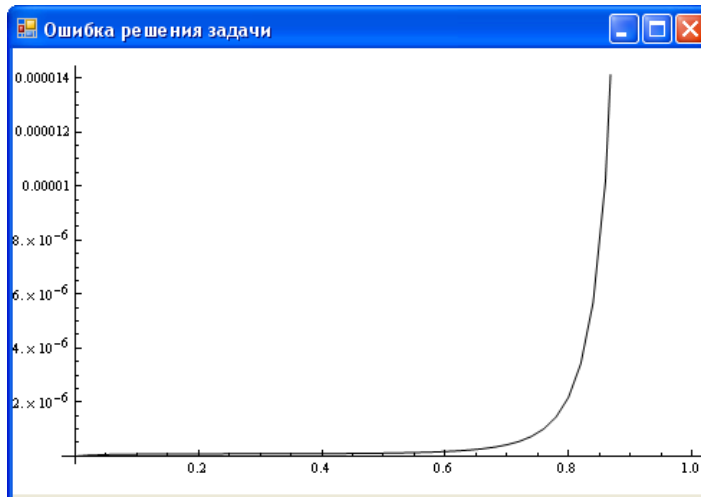


Рис. 4.26. Пример графика невязки решения в программе «Метод малых деформаций»

```

Протокол решения
Эквивалентная дискретная задача имеет вид

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 1.67861 & 0.0797166 \\ 0.795497 & 1.28426 \end{pmatrix} x_n + \begin{pmatrix} 0.720163 \\ 2.32211 \end{pmatrix} u_n$$


$$J(x_n, u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n^T \begin{pmatrix} 8.72473 & 0.39772 \\ 0.39772 & 1.01085 \end{pmatrix} x_n + x_n^T \begin{pmatrix} 0.429799 \\ 1.07059 \end{pmatrix} u_n + u_n^T \begin{pmatrix} 0.429799 & 1.07059 \end{pmatrix} x_n + u_n^T \begin{pmatrix} 2.80178 \\ 2.80178 \end{pmatrix} u_n)$$

Замена управления  $\tilde{u}_n = u_n - (-0.153402 \ -0.38211) x_n$  преобразует задачу к виду

$$x_{n+1} = \begin{pmatrix} 1.56813 & -0.195465 \\ 0.43928 & 0.396958 \end{pmatrix} x_n + \begin{pmatrix} 0.720163 \\ 2.32211 \end{pmatrix} \tilde{u}_n$$


$$J(x_n, u_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n^T \begin{pmatrix} 8.6588 & 0.233489 \\ 0.233489 & 0.601771 \end{pmatrix} x_n + \tilde{u}_n^T \begin{pmatrix} 2.80178 \\ 2.80178 \end{pmatrix} \tilde{u}_n)$$

Решение преобразованной задачи методом факторизации характеристического уравнения
Матрица для определения нулей системы (после z-преобразования):

$$\begin{pmatrix} -1.56813 + z & 0.195465 & 0.185109 & 0.59687 \\ -0.43928 & -0.396958 + z & 0.59687 & 1.92456 \\ -8.6588 & -0.233489 & -1.56813 + \frac{1}{z} & -0.43928 \\ -0.233489 & -0.601771 & 0.195465 & -0.396958 + \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

Корней характеристического уравнения по модулю меньше единицы - 2:

$$z_1 = 0.130055,$$


$$z_2 = 0.768861$$

Синтезированное управление для преобразованной дискретной задачи:

$$\tilde{u}_n^0 = (-3.15098 \ 0.51808) x_n$$

Восстановленное управление для эквивалентной дискретной задачи:

$$u_n = (-3.30438 \ 0.13597) x_n$$

Синтезированное решение исходной задачи с кусочно-постоянными аргументами:

$$u^0(\tau, x) = (-3.30438 \ 0.13597) x(\{t\})$$

Время решения составило 121.047с

```

Рис. 4.27. Протокол решения задачи в программе «Метод факторизации характеристического уравнения»

Вызов задачи «Стабилизация нелинейных систем с КПА» осуществляется нажатием кнопки «Нелинейные системы с КПА» в меню выбора группы решаемых задач (рисунок 4.16). Пользователю предлагается выбрать стабилизируемую систему из выпадающего списка (рисунок 4.28).

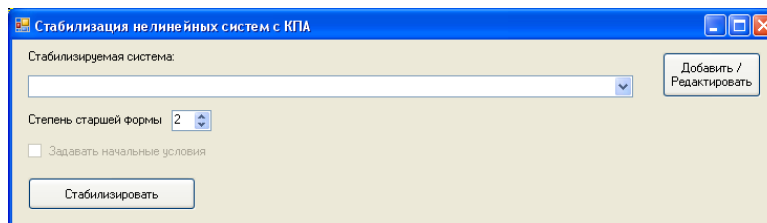


Рис. 4.28. Интерфейс программы «Стабилизация нелинейных систем с КПА»

По умолчанию выпадающий список содержит три демонстрационных задачи, рассмотренных в качестве примеров в §1.6 (рисунок 4.29).

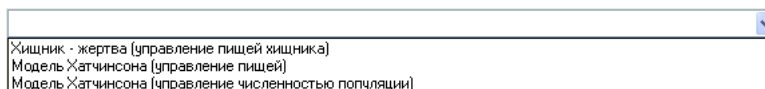


Рис. 4.29. Предлагаемые стабилизируемые системы

Пользователю предоставляется возможность дополнить список собственными решаемыми задачами. С этой целью в программе реализован интерфейс ввода или корректировки исходных данных задач стабилизации нелинейных систем с кусочно-постоянными аргументами (рисунок 4.30), переход к которому осуществляется нажатием кнопки «Добавить / Редактировать». Здесь пользователю предлагается сформулировать решаемую задачу, для чего назвать решаемую задачу, определить размерности задачи и вектора управления, задать систему уравнений (1.3.1) и правую часть критерия качества процесса управления (1.3.2), а также указать символьные параметры — переменные, определяющие вектор решения в дискретные моменты времени и элементы вектора управления. Введенные данные сохраняются в программе и автоматически добавляются в выпадающий список 4.29.

После выбора (постановки) решаемой задачи пользователю остается указать порядок старшей формы в разложениях элементов вектора управления, задать, при необходимости, начальные условия и перейти к решению задачи нажатием кнопки «Стабилизировать».

Также как и для задач стабилизации решений линейных систем с кусочно-постоянными аргументами, решением задачи здесь служат протокол решения и графики стабилизируемого решения и его стабилизирующего управления в случае, если были заданы начальные условия.

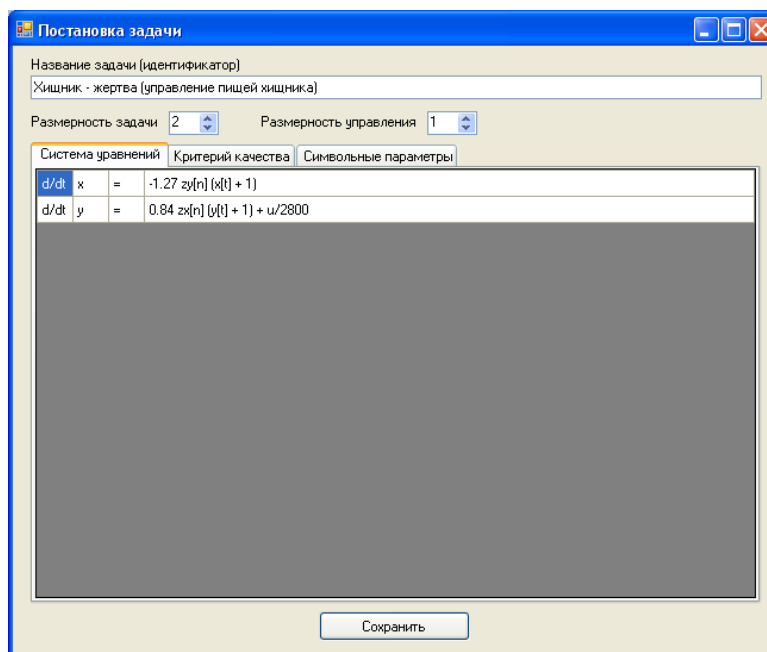


Рис. 4.30. Интерфейс редактирования исходных данных задач вида (1.3.1), (1.3.2)

Протокол решения задачи (1.3.1), (1.3.2), полученный программой «Стабилизация нелинейных систем с КПА», включает в себя:

1. Постановку эквивалентной дискретной задачи (1.3.8), (1.3.9), полученной применением теоремы 1.7;
2. Разложения в ряды правых частей формул (1.3.8) и (1.3.9) вплоть до форм второго порядка;
3. Значение матрицы Риккати уравнения (1.3.16) и определяемое ей решение линеаризованной задачи оптимальной стабилизации (1.3.15);
4. Вычисленные коэффициенты форм разложений в ряды искомым функции Ляпунова и управления вплоть до заданного пользователем порядка;
5. Полученные разложения оптимального стабилизирующего и восстановленного управлений в эквивалентной дискретной и исходной задачах вплоть до заданного пользователем порядка.

В случае выбора пользователем группы решаемых задач «Системы с конечномерными операторами» меню 4.16 пользователю предоставляется возможность выбрать одну из программ «Линейная периодическая конечномерная система» или «Аппроксимирующая линейная периодическая конечномерная система» (рисунок 4.18).

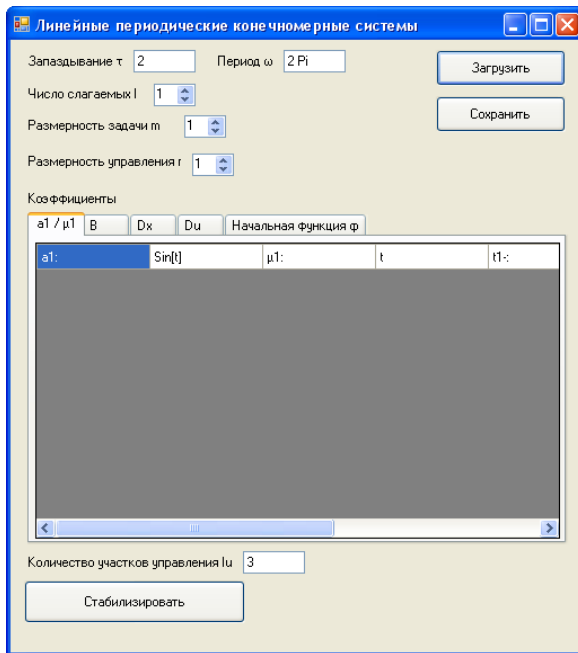


Рис. 4.31. Интерфейс ввода исходных данных программы «Линейная периодическая конечномерная система»

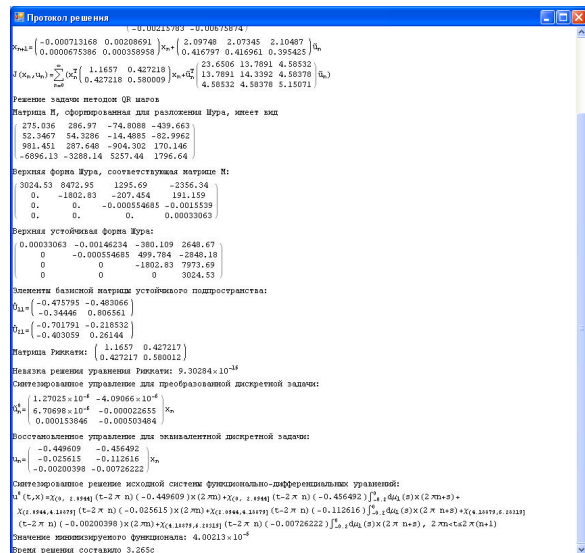


Рис. 4.32. Пример протокола решения задачи программой «Линейная периодическая конечномерная система»

На рисунке 4.31 представлен интерфейс ввода исходных данных программы «Линейная периодическая конечномерная система». Программа предназначена для решения задач вида (2.3.1), (2.3.2). Здесь пользователю предлагается задать следующие параметры: запаздывание τ , период ω , размерности задачи m и вектора управления r , количество слагаемых I в представлении конечномерного вольтеррового оператора (2.1.7) системы (2.3.1), ω -периодические коэффициенты a_i , $i = 1, \dots, I$, границы полуинтервалов $(t_i^-, t_i^+]$, содержащих носители $\text{supp } a_i$, $i = 1, \dots, I$, функции $\mu_i(s)$, $i = 1, \dots, I$, коэффициент $B(t)$ системы (2.3.1), коэффициенты $C_1(t)$ ($D_x(t)$) и $C_2(t)$ ($D_u(t)$), начальную функцию $\varphi \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m)$, количество участков p (I_u) равномерного разбиения полуинтервала $(0, \omega]$, определяющего класс допустимых управлений в задаче.

Результатом работы программы также являются протокол решения задачи (рисунок 4.32) и графики стабилизированного решения и соответствующего ему стабилизирующего управления из заданного класса. Протокол решения задачи содержит постановку эквивалентной задачи оптимальной стабилизации системы разностных уравнений (2.4.5) с дискретным критерием качества (2.4.6), промежуточные вычисления в соответствии с примененным методом приведения к устойчивой форме Шура, вычисленное оптимальное стабилизирующее управление в эквивалентной дискретной задаче и восстановленное в соответствии с теоремой 2.4 стабилизирующее управление исходной задачи.

Интерфейс ввода исходных данных программы «Аппроксимирующая линейная перио-

дическая конечномерная система» существенно не отличается от аналогичного интерфейса программы «Линейная периодическая конечномерная система», изменен ввод линейного конечномерного оператора уравнения (3.3.2). Вместо него пользователю необходимо определить аппроксимирующий линейный конечномерный оператор в виде (3.1.2), для чего указать количество слагаемых I (I_x), набор чисел K_i , $i = 1, \dots, I$, ω -периодические коэффициенты $A_{ik}(t)$ и матричные функции $\hat{\eta}_{ik}(t)$, $k = 1, \dots, K_i$, $i = 1, \dots, I$. Здесь разбиение Δ_I полуинтервала $(0, \omega]$ является равномерным и определяется вводимым параметром I .

С учетом этого постановка эквивалентной задачи оптимальной стабилизации системы разностных уравнений с дискретным критерием качества, содержащаяся в протоколе решения задачи, имеет вид (3.3.9), а восстановленное стабилизирующее управление исходной задачи определяется теоремой 3.5 и имеет вид (3.3.11).

§4.3. Использование программного комплекса средствами консоли пакета Wolfram Mathematica 8.0

Архитектура программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8.0 позволяет использовать реализованные в нем задачи, не прибегая к его графической части. Это может быть удобным в случаях, когда решаемые задачи стабилизации дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами являются частью более широких исследований, осуществляемых в пакете Wolfram Mathematica 8.0.

Для подключения одной из программ программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8.0 к пакету Wolfram Mathematica 8.0 используется команда вида

`<<<установочный путь программного комплекса>><подключаемый модуль>.`

Здесь установочный путь в виде адресной строки задается в соответствии с синтаксисом пакета Wolfram Mathematica 8.0. Так, например, для подключения программы «Метод Ньютона», содержащуюся в модуле «PCANewtonMethodPC.m», находящемся в папке «PCAStab» диска «С», следует использовать команду

`<<C:\\PCAStab\\PCANewtonMethodPC.m.`

Опишем функции, реализованные в модулях программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8.0.

В модуле «PCANewtonMethodPC.m» определены функции

`PCAStabNewtonMethodPC[l, Azv, ACoef, BCoef, DnxCoef, DnuCoef, x0, arg],`

`PCAStabDraw[l, ACoef, BCoef, arg, x0, Adis, Bdis, K, X].`

Функция `PCAStabNewtonMethodPC` предназначена для решения задачи стабилизации линейной 1–периодической системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.1.1) с критерием качества процесса управления (1.1.2) методом Ньютона. Функция `PCAStabDraw` предназначена для построения графиков стабилизируемого решения дифференциального управления (1.1.1) и соответствующего ему стабилизирующего управления, минимизирующего критерий (1.1.2).

Входные параметры функции `PCAStabNewtonMethodPC`: l — параметр, определяющий старший запаздывающий аргумент $[t-l]$ и количество слагаемых в системе (1.1.1); Azv — матрица $A^o(t)$; $ACoef$ — массив матричных коэффициентов $A_i(t)$, $i = 1, \dots, l$, задаваемый в виде $\{A_1[t], \dots, A_l[t]\}$; $BCoef$ — матричный коэффициент $B(t)$; $DnxCoef$ и $DnuCoef$ — матричные коэффициенты $D_x(t)$ и $D_u(t)$ соответственно; $x0$ — необязательный массив начальных условий вида $\{x(0), \dots, x(-l)\}$; arg — символ, используемый для обозначения аргумента в параметрах Azv , $ACoef$, $BCoef$, $DnxCoef$, $DnuCoef$ (в используемых здесь обозначениях $arg = t$). Параметры $Adis$, $Bdis$, $Kish$, X функции `PCAStabDraw` определяются выходными значениями функции `PCAStabNewtonMethodPC`.

Ее выходные значения имеют вид $\{res, prot\}$, где res — массив выходных значений вида $\{K, \{X, Adis, Bdis\}\}$, а $prot$ — протокол решения задачи. Здесь K — матричный коэффициент искомого стабилизирующего управления решаемой задачи, параметры X , $Adis$, $Bdis$ соответствуют используемым в функции `PCAStabDraw`.

Определение входных параметров функции `PCAStabDraw` совпадает с соответствующими определениями входных и выходных параметров функции `PCAStabNewtonMethodPC`. Результатом работы функции `PCAStabDraw` являются графики стабилизированного решения и соответствующего ему стабилизирующего управления.

Следует отметить, что формируемый здесь и далее протокол решения задачи имеет специальное представление, для его корректного отображения используется команда `Apply[SequenceForm[prot]]`; содержание протокола решения задачи $prot$ подробно описано в §3.2.

Модули «`PCAQRAlgorithmPC.m`», «`PCANhomotopyMethodPC.m`» и «`PCAFactorizationMethodPC.m`» максимально унифицированы с модулем «`PCANewtonMethodPC.m`», что означает полное совпадение входных и выходных данных, описание которых приведено ранее. Кроме того, в каждом из этих модулей реализована функция `PCAStabDraw` с синтаксисом, описанным выше. Приведем описание функций, предназначенных для решения задачи (1.1.1), (1.1.2).

В модуле «PCAQRAlgorithmPC.m» функция

$$\text{PCAStabQRAlgorithmPC}[l, \text{Azv}, \text{ACoef}, \text{BCoef}, \text{DnxCoef}, \text{DnuCoef}, \text{x0}, \text{arg}]$$

осуществляет решение задачи методом приведения к устойчивой форме Шура.

В модуле «PCANomotopyMethodPC.m» реализованы функции

$$\text{PCAStabHomotopyMethodRKPC}[l, \text{Azv}, \text{ACoef}, \text{BCoef}, \text{DnxCoef}, \text{DnuCoef}, \text{x0}, \text{arg}, \mu s],$$

$$\text{PCAStabHomotopyMethodENPC}[l, \text{Azv}, \text{ACoef}, \text{BCoef}, \text{DnxCoef}, \text{DnuCoef}, \text{x0}, \text{arg}, \mu s].$$

Здесь функция `PCAStabHomotopyMethodRKPC` решает задачу методом продолжения по параметру с решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2.35) методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом μs ($\mu s < 1$). Функция `PCAStabHomotopyMethodENPC` реализует метод продолжения по параметру с решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.2.38) методом Эйлера с пересчетом с шагом μs .

В модуле «PCAFactorizationMethodPC.m» определена функция

$$\text{PCAStabFactorizationMethodPC}[l, \text{Azv}, \text{ACoef}, \text{BCoef}, \text{DnxCoef}, \text{DnuCoef}, \text{x0}, \text{arg}],$$

осуществляющая решение задачи стабилизации (1.1.1), (1.1.2) в случае скалярного управления методом факторизации характеристического уравнения.

Для решения задач стабилизации нелинейных 1-периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.3.1) с критерием качества процесса управления (1.3.2) предназначен модуль «NLPStabAlgorithmPC.m». В нем реализованы функции

$$\text{NLPStabMainPC}[\text{Sys}, \omega, \text{xs}, \text{us}, \text{arg}, \text{xns}, \text{argn}, \text{N}, \text{Sys0}],$$

$$\text{NLPStabDraw}[\text{drawargs}].$$

Функция `NLPStabMainPC` предназначена для формирования коэффициентов степенных форм в асимптотическом представлении стабилизирующего управления в соответствии с методом, изложенным в §1.5. Функция `NLPStabDraw` предназначена для построения графиков стабилизируемого решения дифференциального управления (1.3.1) и соответствующего ему стабилизирующего управления.

Здесь `Sys` — массив длины m , содержащий семантически описанные (в соответствии с правилами пакета Wolfram Mathematica 8.0) дифференциальные уравнения, составляющие систему (1.3.1), ω — подынтегральная функция критерия качества (1.3.2), `xs` и `us` — массивы длины m и r , задающие символы для идентификации неизвестных элементов вектора решения системы (1.3.1) и вектора управления, `arg` — символ, используемый

для обозначения аргумента в задаче, xns и $argn$ — то же, что и xs и arg , для дискретных моментов времени, N — требуемое число элементов разложения в асимптотическом представлении стабилизирующего управления, $Sys0$ — массив длины l , определяющий начальные условия.

Функция `NLPStabMainPC` возвращает массив данных $\{l_u, prot, drawargs\}$, в котором l_u представляет собой массив коэффициентов l_q степенных форм разложения стабилизирующего управления в ряд по элементам массива xs , где $q \in \mathbb{N}^{m(l+1)}$, $|q| = k$, $k = 1, \dots, N$, m — размерность задачи, $prot$ — протокол решения задачи, а $drawargs$ представляет собой набор параметров для обращения к функции `NLPStabDraw`.

Результатом работы функции `NLPStabDraw` являются графики стабилизированного решения и соответствующего ему асимптотического представления стабилизирующего управления.

В модулях «`FOStabAlgorithmPC.m`» и «`AFOStabAlgorithmPC.m`» определены функции `FOStabQRAlgorithmPC[ACoef, μ_s , tminus, tplus, BCoef, DnxCoef, DnuCoef, τ , ω , I_u , φ , arg]` и `AFOStabQRAlgorithmPC[I_x , K, ACoef, η_s , BCoef, DnxCoef, DnuCoef, τ , ω , I_u , φ , arg]` соответственно.

Функция `FOStabQRAlgorithmPC` предназначена для решения задачи стабилизации линейных ω -периодических конечномерных систем дифференциальных уравнений с последствием (2.3.1), (2.3.2). Функция `AFOStabQRAlgorithmPC` предназначена для решения задачи стабилизации аппроксимирующих линейных ω -периодических конечномерных систем дифференциальных уравнений с последствием (3.3.2) с критерием качества (3.3.4).

Для функции `FOStabQRAlgorithmPC` $ACoef$ — массив матричных коэффициентов $\{a_1(t), \dots, a_I(t)\}$, μ_s — массив функций $\{\mu_1(t), \dots, \mu_I(t)\}$, $tminus$ и $tplus$ — массивы значений, определяющих границы полуинтервалов $(t_i^-, t_i^+]$, содержащих носители $\text{supp } a_i$, $i = 1, \dots, I$, $BCoef$ — коэффициент $B(t)$ системы (2.3.1), $DnxCoef$ и $DnuCoef$ — коэффициенты $C_1(t)$ и $C_2(t)$ критерия качества процесса управления (2.3.2), τ — величина запаздывания, ω — период, I_u — количество участков p равномерного разбиения полуинтервала $(0, \omega]$, определяющего класс допустимых управлений в задаче, φ — начальная функция $\varphi \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}^m)$, arg — символ, используемый для обозначения аргумента в задаче.

Возвращаемые значения функцией `FOStabQRAlgorithmPC` имеют вид $\{k, prot\}$, где k — матричный коэффициент усиления в стабилизирующем управлении поставленной задачи, а $prot$ — протокол решения задачи, подробно описанный в §3.2.

Для функции `AFOStabQRAlgorithmPC` I_x — параметр, задающий количество слагаемых I в представлении оператора (3.1.2), K — массив параметров, определяю-

щих значения $\{K_1, \dots, K_I\}$, ACoeff — двумерный массив, определяющий коэффициенты $\{\{a_{11}(t), \dots, a_{1K_1}(t)\}, \dots, \{a_{I1}(t), \dots, a_{IK_I}(t)\}\}$, η_s — двумерный массив, определяющий функции $\{\{\hat{\eta}_{11}(t), \dots, \hat{\eta}_{1K_1}(t)\}, \dots, \{\hat{\eta}_{I1}(t), \dots, \hat{\eta}_{IK_I}(t)\}\}$, I_u — параметр, определяющий количество участков равномерного разбиения Δ_I полуинтервала $(0, \omega]$, а параметры BCoeff, DnxCoef, DnuCoef, τ , ω , φ и \arg имеют тот же смысл, что и для функции FOSTabQRAlgorithmPC.

Возвращаемые значения функцией AFOSTabQRAlgorithmPC совпадают с выходными параметрами функции FOSTabQRAlgorithmPC.

Построение графиков стабилизируемых решений и соответствующих им стабилизирующих управлений в виде отдельных процедур не реализовано и осуществляется автоматически по результатам работы FOSTabQRAlgorithmPC, AFOSTabQRAlgorithmPC.

Использование программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8.0 средствами консоли этого пакета проиллюстрируем на следующем примере.

Пример 4.14. Построим стабилизирующее управление в задаче (1.4.5), (1.4.6), рассмотренной §1.6, с помощью пакета Wolfram Mathematica 8.0 и модуля «NLPStabAlgorithmPC.m» из состава программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8.0. С этой целью введем следующие данные

$$\begin{aligned} r1 &= 1.27; r2 = 0.84; \\ K1 &= 6000; K2 = 2800; \\ ix[0] &= 3400; iy[0] = 1840; \\ rx[0] &= ix[0]/K1 - 1; ry[0] = iy[0]/K2 - 1. \end{aligned}$$

Сформулируем задачу следующим образом. Определим систему дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами (1.3.1) и критерий качества (1.3.2) в виде

$$\text{Sys} = \{D[x[s], s] == -r1 zy (x[s] + 1), D[y[s], s] == r2 zx (y[s] + 1) + u/K2\};$$

$$\omega = x^2 + y^2 + u^2;$$

зададимся начальными условиями

$$\text{Sys0} = \{rx[0], ry[0]\};$$

и определим набор символьных параметров

$$\arg = s; \argn = n;$$

$$xs = \{x, y\}; xns = \{zx, zy\};$$

```
us = {u};
```

Решение задачи стабилизации будем осуществлять вплоть до членов 5-го порядка

```
N = 5;
```

Подключим модуль «NLPStabAlgorithmPC.m» из состава программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8.0

```
<<D:\PCAStab\NLPStabAlgorithmPC.m;
```

и обратимся к функции NLPStabMainPC модуля «NLPStabAlgorithmPC.m»

```
{k, prot, drawargs} = NLPStabMainPC[Sys, ω, xs, us, arg, xns, argn, N];
```

Преобразуем протокол решения задачи к пригодному для просмотра виду

```
Apply[SequenceForm, prot]
```

Построим графики стабилизируемого решения и найденного стабилизирующего управления с помощью команды

```
Apply[NLPStabDraw, drawargs]
```

Имеем

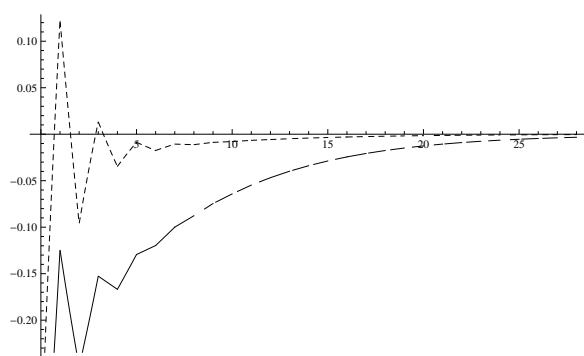


Рис. 4.33. График стабилизируемого решения

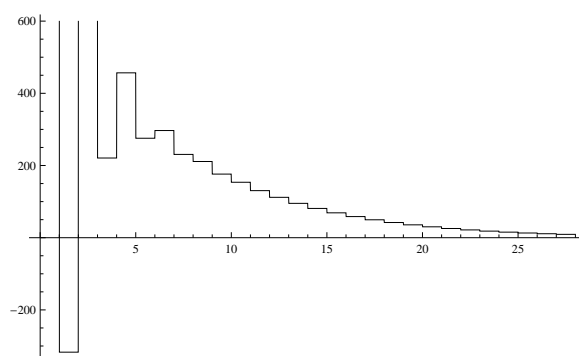


Рис. 4.34. График стабилизирующего управления

Результаты, полученные в §1.6, получаются из результатов настоящего примера с помощью преобразований $x = K1(\tilde{y}_{1,0} + 1)$, $y = K2(\tilde{y}_{2,0} + 1)$.

На отрезке $t \in [0, n-1]$ система уравнений имеет решение (правые части)

$$\begin{pmatrix} e^{-1.17 \times t} \gamma(t) \left(1, e^{1.17 \times t} \gamma(t) - 1, e^{1.17 \times t} \gamma(t) + 1, e^{1.17 \times t} \gamma(t) \times [n] \right) \\ e^{0.84 \times n \times [n]} \left(-0.0042127 e^{0.84 \times n \times [n]} \omega_{1,0} - 0.0042127 e^{0.84 \times n \times [n]} \omega_{2,0} + e^{0.84 \times n \times [n]} \omega_{3,0} + e^{0.84 \times n \times [n]} \omega_{4,0} + e^{0.84 \times n \times [n]} \omega_{5,0} + e^{0.84 \times n \times [n]} \omega_{6,0} \right) \end{pmatrix}$$

Правая часть эквивалентной системы разностных уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^{-1.17 \tilde{Y}_{1,0}} \left(1, -1, e^{1.17 \tilde{Y}_{1,0}} + 1, \tilde{Y}_{1,0} \right) \\ 1, -0.0042127 \omega_{1,0} - 0.0042127 e^{0.84 \tilde{Y}_{1,0}} \omega_{1,0} - \tilde{Y}_{1,0} \omega_{1,0} + e^{0.84 \tilde{Y}_{1,0}} \tilde{Y}_{1,0} \omega_{1,0} + e^{0.84 \tilde{Y}_{1,0}} \tilde{Y}_{1,0} \tilde{Y}_{1,0} \end{pmatrix}$$

Эквивалентный дискретный функционал имеет вид $\sum_{k=0}^{n-1} u^k$, где,

$$\omega_{1,0} = e^{-1.17 \tilde{Y}_{1,0}} \left(e^{1.17 \tilde{Y}_{1,0}} (1.5748 + 1.5748 \tilde{Y}_{1,0}) + e^{1.17 \tilde{Y}_{1,0}} (-0.393701 - 0.787402 \tilde{Y}_{1,0} - 0.393701 \tilde{Y}_{1,0}^2) + e^{0.84 \tilde{Y}_{1,0}} (-1.1811 - 0.787402 \tilde{Y}_{1,0} + 0.393701 \tilde{Y}_{1,0}^2 + 1. \tilde{Y}_{1,0}) \right) \\ \frac{1}{\tilde{Y}_{1,0}} \left(1, \left(3.22803 \times 10^{-7} - 4.30404 \times 10^{-7} e^{0.84 \tilde{Y}_{1,0}} + 1.07601 \times 10^{-7} e^{1.68 \tilde{Y}_{1,0}} + 1.8077 \times 10^{-7} \tilde{Y}_{1,0} \right) + \left(0.00151846 + 0.00085034 \tilde{Y}_{1,0} + e^{0.84 \tilde{Y}_{1,0}} (-0.00202462 - 0.00101231 \tilde{Y}_{1,0}) + e^{1.68 \tilde{Y}_{1,0}} (0.000506155 + 0.000506155 \tilde{Y}_{1,0}) + 0.000506155 \tilde{Y}_{1,0} \right) \right) \\ \tilde{Y}_{1,0} \left(1.78571 + 1. \tilde{Y}_{1,0} + e^{0.84 \tilde{Y}_{1,0}} (-2.38095 - 2.38095 \tilde{Y}_{1,0}) + e^{1.68 \tilde{Y}_{1,0}} (0.771517 + 0.771517 \tilde{Y}_{1,0})^2 + (1.19048 - 0.595238 \tilde{Y}_{1,0}) \tilde{Y}_{1,0} \right)$$

Разложение в ряд правой части эквивалентной системы разностных уравнений

$$\left(1, \tilde{Y}_{1,0} - 1.27 \tilde{Y}_{1,0}^2 - 1.27 \tilde{Y}_{1,0}^3 \tilde{Y}_{1,0} + 0.80645 \tilde{Y}_{1,0}^4 + 0.80645 \tilde{Y}_{1,0}^5 \tilde{Y}_{1,0} \right) \dots$$

Разложение в ряд произвольной по управлению

$$\left(0.000357143 + 0.00015 \tilde{Y}_{1,0} + 0.000042 \tilde{Y}_{1,0}^2 \right) \dots$$

Разложение в ряд функционала эквивалентной дискретной задачи

$$1, u^2 + 0.0002 u \tilde{Y}_{1,0} + 2.67857 \times 10^{-8} u^2 \tilde{Y}_{1,0} + 1.2352 \tilde{Y}_{1,0}^2 + 0.000126 u \tilde{Y}_{1,0}^2 + 1.05 \times 10^{-8} u^2 \tilde{Y}_{1,0}^2 + 0.000357143 u \tilde{Y}_{1,0} - 0.43 \tilde{Y}_{1,0}^3 \tilde{Y}_{1,0} + 0.0003 u \tilde{Y}_{1,0}^3 - 0.5644 \tilde{Y}_{1,0}^4 \tilde{Y}_{1,0} + 0.000147 u \tilde{Y}_{1,0}^4 \tilde{Y}_{1,0} + 1.53763 \tilde{Y}_{1,0}^5 + 2.4529 \tilde{Y}_{1,0}^6 \tilde{Y}_{1,0} + 1.54567 \tilde{Y}_{1,0}^7 \tilde{Y}_{1,0} + \dots$$

Разложение в ряд его произвольной по вектору управления

$$\left(2, u + 0.0002 \tilde{Y}_{1,0} + 5.35714 \times 10^{-8} u \tilde{Y}_{1,0} + 0.000126 \tilde{Y}_{1,0}^2 + 2.1 \times 10^{-8} u^2 \tilde{Y}_{1,0}^2 + 0.000357143 \tilde{Y}_{1,0}^3 + 0.0003 \tilde{Y}_{1,0}^4 \tilde{Y}_{1,0} + 0.000147 \tilde{Y}_{1,0}^5 \tilde{Y}_{1,0} \right) \dots$$

Положительно определенная матрица Рунжати (решение уравнения Рунжати - 1-й шаг процедуры)

$$P = \begin{pmatrix} 2.28466 \times 10^7 & -1.45076 \times 10^7 \\ -1.45076 \times 10^7 & 5.29665 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты формы 1-го порядка вектора управления

$$\begin{pmatrix} u[1][0, 1] \\ u[1][1, 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4429.66 \\ -1860.46 \end{pmatrix}$$

Решение линейной системы уравнений на 2-м шаге:

Коэффициенты формы порядка 2 в разложении функции Лапунова

$$\begin{pmatrix} c[0, 3] \\ c[1, 2] \\ c[2, 1] \\ c[3, 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.27386 \times 10^7 \\ 4.71149 \times 10^7 \\ -1.2192 \times 10^7 \\ -9.39987 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты форм порядка 2 в разложении вектора управления

$$\begin{pmatrix} u[1][0, 2] \\ u[1][1, 1] \\ u[1][2, 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -423.237 \\ -246.703 \\ -204.979 \end{pmatrix}$$

Решение линейной системы уравнений на 3-м шаге:

Коэффициенты формы порядка 3 в разложении функции Лапунова

$$\begin{pmatrix} c[0, 4] \\ c[1, 3] \\ c[2, 2] \\ c[3, 1] \\ c[4, 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.54613 \times 10^7 \\ -5.42513 \times 10^7 \\ 4.42553 \times 10^7 \\ -8.69389 \times 10^6 \\ 1.02092 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты формы порядка 3 в разложении вектора управления

$$\begin{pmatrix} u[1][0, 3] \\ u[1][1, 2] \\ u[1][2, 1] \\ u[1][3, 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 168.746 \\ -49.4416 \\ -311.844 \\ -39.2693 \end{pmatrix}$$

Решение линейной системы уравнений на 4-м шаге:

Коэффициенты формы порядка 4 в разложении функции Лапунова

$$\begin{pmatrix} c[0, 5] \\ c[1, 4] \\ c[2, 3] \\ c[3, 2] \\ c[4, 1] \\ c[5, 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.246 \times 10^7 \\ 5.34886 \times 10^7 \\ -6.12751 \times 10^7 \\ 2.01439 \times 10^7 \\ -648165. \\ -6.0507 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты формы порядка 4 в разложении вектора управления

$$\begin{pmatrix} u[1][0, 4] \\ u[1][1, 3] \\ u[1][2, 2] \\ u[1][3, 1] \\ u[1][4, 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -153.699 \\ 254.67 \\ -31.1958 \\ 38.5922 \\ 36.3068 \end{pmatrix}$$

Решение линейной системы уравнений на 5-м шаге:

Коэффициенты формы порядка 5 в разложении функции Лапунова

$$\begin{pmatrix} c[0, 6] \\ c[1, 5] \\ c[2, 4] \\ c[3, 3] \\ c[4, 2] \\ c[5, 1] \\ c[6, 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.83875 \times 10^6 \\ -4.25733 \times 10^7 \\ 5.39679 \times 10^7 \\ -8.70206 \times 10^6 \\ -1.15265 \times 10^7 \\ 3.38134 \times 10^6 \\ 5.99251 \times 10^6 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты формы порядка 5 в разложении вектора управления

$$\begin{pmatrix} u[1][0, 5] \\ u[1][1, 4] \\ u[1][2, 3] \\ u[1][3, 2] \\ u[1][4, 1] \\ u[1][5, 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -55.5736 \\ 387.215 \\ -800.447 \\ 428.66 \\ -103.375 \\ 24.4173 \end{pmatrix}$$

Рис. 4.35. Протокол решения задачи

Литература

1. *Akmet M.U., Arugaslan D., Yilmaz E.* Method of Lyapunov functions for differential equations with piecewise constant delay // J. Comput. and Appl. Math. 2011. V. 235, № 16. P. 4554–4560.
2. *Akmet M.U., Büyükdali C.* Differential equations with state-dependent piecewise constant argument // Nonlinear Anal. Theory. Meth. and Appl. 2010. V. 72, № 11. P. 4200–4210.
3. *Alonso A., Hong J., Rojo J.* A class of ergodic solution of differential equations with piecewise constant arguments // Dyn. Syst. Appl. 1998. V. 7, № 4. P. 561–574.
4. *Cabada A., Ferreira J.B.* First order differential equations with piecewise constant arguments and nonlinear boundary value conditions // J. Math. Anal. and Appl. 2011. V. 380, № 1. C. 124–136.
5. *Cooke K.L.* Retarded differential equations with piecewise constant delays // J. Math. Anal. and Appl. 1984. V. 99. P. 265–297.
6. *Cooke K.L.* Stability of non-autonomous delay differential equations by Liapunov functionals // Lec. Notes in Math. 1984. № 1076. P. 41–52.
7. *Cooke K.L., Ferreira J.M.* Stability conditions for linear retarded functional differential equations // J. Math. Anal. and Appl. 1983. V. 96, № 2. P. 480–504.
8. *Cooke K.L., Gyori I.* Numerical approximation of the solutions of delay differential equations on an infinite interval using piecewise constant arguments // Comput. Math. Appl. 1994. V. 28. P. 81–92.
9. *Cooke K.L., Turi J., Turner G.* Stabilization of hybrid systems in the presence of feedback delays // Inst. Math. and Appl. / Preprint series № 906. 1991. 15 p.
10. *Cooke K.L., Wiener J.* Retarded differential equations with piecewise constant delays // J. Math. Anal. and Appl. 1984. V. 99. P. 265–297.
11. *Delfour M.C.* The linear quadratic optimal control problem for hereditary differential systems: theory and numerical solution // Appl. Math. Optim. 1976. V. 3, № 2–3. P. 101–162.
12. *Feng Qinxiang, Yuan Rong.* On the Lasota-Ważews-Ku model with piecewise constant argument // Acta Math. sci. B. 2006. V. 26, № 2. P. 371–378.
13. *George S.* Periodic solutions of differential equations with piecewise constant delays // Commun. Appl. Anal. 2003. V. 7, № 2–3. P. 443–453.

14. *Gibson J.S.* Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control and Optim. 1983. V. 21, № 1. P. 95–139.
15. *Golpalsamy K.* Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Dordrecht: Kluwer academic publishers, 1992.
16. *Gyori I.* On approximation of the solutions of delay differential equations by using piecewise constant arguments // Int. J. Math. and Math. Sci. 1991. V. 14, № 1. P. 111–126.
17. *Hairer E., Norsett S.P., Wanner G.* Solving ordinary differential equations I. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
18. *Hairer E., Wanner G.* Solving ordinary differential equations II. Stiff and differential-algebraic problems. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
19. *Jiang Guirong, Lu Qishao.* Impulsive state feedback control of a predator-prey model // J. Comput. and Appl. Math. 2007. V. 200, № 1. P. 193–207.
20. *Laub A.J.* A Schur method for solving algebraic riccati equations // IEEE Trans. on Autom. Control. 1979. V. 24. P. 913–921.
21. *Li Huaixing, Muroya Yoshiaki, Nakata Yukihiro, Yuan Rong.* Global stability of nonautonomous logistic equations with a piecewise constant delay // Nonlinear Anal.: Real World Appl. 2010. V. 11, № 3. P. 2115–2126.
22. *Liu P., Golpalsamy K.* Global stability and chaos in a population model with piecewise constant arguments // Appl. Math. and Comput. 1999. V. 101, № 1. P. 63–88.
23. *Liz E.* A sharp global stability result for a discrete population model // J. Math. Anal. and Appl. 2007. V. 330, № 1. P. 740–743.
24. *Mangano S.* Mathematica cookbook. Sebastopol: O'Reilly, 2010.
25. *May R.M.* Biological populations obeying difference equations. Stable points, stable cycles and chaos // J. Theor. Biol. 1975. V. 51, № 2. P. 511–524.
26. *Rong Y.* On almost periodic solution of differential equations with piecewise constant arguments // Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc. 2006. V. 141, № 1. P. 161–174.
27. *Seifert G.* Periodic solutions of differential equations with piecewise constant delays // Commun. Appl. Anal. 2003. V. 7, № 2–3. P. 443–453.
28. *Shao Yuanfu, Dai Binxiang.* The dynamics of an impulsive delay predator-prey model with stage structure and Beddington-type functional response // Real. World Appl. 2010. V. 11, № 5. P. 3567–3576.

29. *Stamova Ivanka M.* Impulsive control for stability of n-species Lotka-Volterra cooperation models with finite delays // *Math. Lett.* 2010. V. 23, № 9. P. 1003–1007.
30. *Wang Li, Yuan Rong, Zhang Chuan Yi.* A spectrum relation of almost periodic solution of second order scalar functional differential equations with piecewise constant argument // *Acta math. sin. Engl. Ser.* 2011. V. 27, № 11. P. 2275–2284.
31. *Wolfram S.* Mathematica book. 5th edition. Wolfram Media, 2003.
32. *Xia Yonghui.* Global analysis of an impulsive delayed Lotka-Volterra competition system // *Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simul.* 2011. V. 16, № 3. С. 1597–1616.
33. *Yoshiaki M.* A sufficient condition on global stability in a logistic equations with piecewise constant arguments // *Hokkaido Math. J.* 2003. V. 32, № 1. P. 75–83.
34. *Zhang Yuanliang, Chong Kil To.* Time-discretization of nonlinear control systems with State-delay via Taylor-Lie series // *Nonlinear Anal.: Theory, Meth. and Appl.* 2009. V. 70, № 1. С. 83–98.
35. *Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н.* Некоторые алгоритмы оптимального управления // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2006. Т. 12, № 2. С. 3–17.
36. *Азбелев Н.И., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерных исслед., 2002.
37. *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // *ПММ.* 1957. Т. 21, вып. 5. С. 658–669.
38. *Альбрехт Э.Г.* Об оптимальной стабилизации нелинейных систем // *ПММ.* 1961. Т. 25, вып. 5. С. 836–844.
39. *Альбрехт Э.Г., Шелементьев Г.С.* Лекции по теории стабилизации. Свердловск: изд-во УрГУ им. А.М. Горького, 1972.
40. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
41. *Арис Р.* Дискретное динамическое программирование. М.: Мир, 1969.
42. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998.
43. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
44. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965.

45. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.
46. *Богачев К.Ю.* Практикум на ЭВМ. Методы решения нелинейных систем и нахождения собственных значений. М., 1998.
47. *Бромберг П.В.* Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М., 1967.
48. *Гальперин Е.А., Красовский Н.Н.* О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем // ПММ. 1963. Т. 27, вып. 6. С. 988–1004.
49. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука. 1965.
50. *Давиденко Д.Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 4. С. 601-602.
51. *Давиденко Д.Ф.* О приближенном решении систем нелинейных уравнений // Укр. матем. журнал. 1953. Т. 5, № 2. С. 196-206.
52. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Мир, 1962.
53. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. М.: Мир, 1966.
54. *Джури Е.И., Цыпкин Я.З.* Теория дискретных автоматических систем (обзор) // АиТ. 1970. № 6. С. 57–82.
55. *Долгий Ю.Ф.* К стабилизации линейных автономных систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // АиТ. 2007. № 11. С. 92–105.
56. *Дьяконов В.П.* Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления. М.: ДМК Пресс. 2008.
57. *Долгий Ю.Ф., Кошкин Е.В.* Использование конечномерных аппроксимаций в задаче стабилизации периодических систем с последействием // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. 2015. № 1. С. 29–45.
58. *Долгий Ю.Ф., Кошкин Е.В.* Оптимальная стабилизация динамических процессов в периодических линейных системах дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Проблемы динамического управления: Сб. науч. трудов ф-та ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. 2010. Вып. 5. С. 102–112.
59. *Долгий Ю.Ф., Кошкин Е.В.* Оптимальная стабилизация линейных периодических конечномерных систем дифференциальных уравнений с последействием // Тр. Ин-та математики и механики. 2013. Т. 19, № 1. С. 87–98.

60. Долгий Ю.Ф., Кошкин Е.В. Оптимальная стабилизация систем нелинейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Тезисы II Международной школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи». Иркутск, 2010. С. 25.
61. Долгий Ю.Ф., Тарасян В.С. Конечномерные операторы монодромии для периодических систем дифференциальных уравнений с последействием // Изв. Урал. гос. ун-та. 2000. № 18 (Математика и механика. Вып. 3). С. 67–83.
62. Долгий Ю.Ф., Тарасян В.С. Условия конечномерности оператора монодромии для периодических систем с последействием // Изв. вузов. Математика. 2003. № 3. С. 27–39.
63. Жуковский Е.С., Алвеш М.Ж. Абстрактные вольтерровы операторы // Изв. вузов. Математика. 2008. № 3. С. 3–17.
64. Жулин С.С. Метод продолжения решения по параметру и его приложение к задачам оптимального управления // Вычислительные методы и программирование. 2007. Т. 8. С. 205–217.
65. Зайцев В.А., Попова С.Н., Тонков Е.Л. О свойстве равномерной полной управляемости линейной управляемой системы с дискретным временем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 4. С. 53–63.
66. Зубер И.Е. Синтез стабилизирующего управления для нелинейных дискретных объектов // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука. Сиб. отд. 1989. С. 216–219.
67. Зубов В.И. Лекции по теории управления. СПб.: Изд-во «Лань», 2009.
68. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука. 1984.
69. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
70. Кащенко С.А. Оптимизация процесса охоты // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 10. С. 1706–1709.
71. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
72. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
73. Кошкин Е.В. Исследование динамики модели Хатчинсона с кусочно-постоянным аргументом // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 38-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 169–173.

74. Кошкин Е.В. Конечномерные аппроксимации в задаче стабилизации периодических систем с последствием // Вестник Тамбовского Университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов, 2013. Т. 18, № 5, С. 2561–2563.
75. Кошкин Е.В. Метод продолжения по параметру в задаче оптимальной стабилизации линейных периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Системы управления и информационные технологии. Москва-Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2012. С. 16–20.
76. Кошкин Е.В. Метод продолжения решения по параметру в задаче оптимальной стабилизации систем линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Вестник Тамбовского Университета. Серия: Естественные и технические науки. Тамбов, 2011. Т. 16, № 4, С. 1105–1107.
77. Кошкин Е.В. Оптимальная стабилизация решений дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 40-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2009. С. 155–160.
78. Кошкин Е.В. Оптимальная стабилизация динамических процессов в системах дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Тез. докладов XI-й международной конференции Устойчивость и колебания нелинейных систем управления. Москва, 2010. С. 195–197.
79. Кошкин Е.В. Оптимальная стабилизация систем линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Проблемы теоретической и прикладной математики: Тез. 41-й Всероссийской молодежной конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2010. С. 359–366.
80. Кошкин Е.В. Построение оптимальных стабилизирующих управлений в математической модели Хатчинсона с кусочно-постоянными аргументами // Современные проблемы математики: Тез. 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. С. 37–39.
81. Кошкин Е.В. Применение метода Понтрягина для построения оптимальных стабилизирующих управлений в линейных системах с кусочно-постоянными аргументами // Труды X международной четаевской конференции. Казань, 2012. Т. 3, ч. II. С. 47–56.
82. Кошкин Е.В. Продолжение по параметру в задаче оптимальной стабилизации систем линейных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Тез. докладов международной конференции по математической теории управления и механике. Суздаль, 2011. С. 115–117.

83. *Кошкин Е.В.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014661613 “PCAStab для Wolfram Mathematica 8”. Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 10 ноября 2014.
84. *Кошкин Е.В.* Синтез управлений для дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 39-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. 2008. С. 270–274.
85. *Кошкин Е.В.* Стабилизация конечномерных периодических систем дифференциальных уравнений с последействием средствами программного комплекса PCAStab для Wolfram Mathematica 8 // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби: Тез. докл. II Междунар. семинара, посвященного 70-летию со дня рождения акад. А.И. Субботина. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, УрФУ. 2015. С. 74–75.
86. *Кошкин Е.В., Долгий Ю.Ф.* Построение оптимального стабилизирующего управления для нелинейной системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами // Тез. XII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». Москва, 2012. С. 183–185.
87. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рунцицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
88. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз. 1959.
89. *Красовский Н.Н.* Об аналитическом конструировании регулятора в системе с запаздыванием времени // ПММ. 1962. Т. 26, вып. 3. С. 39–51.
90. *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // ПММ. 1964. Т. 28, № 4. С. 716–724.
91. *Красовский Н.Н.* Об оптимальном регулировании в линейных системах с запаздываниями времени // Сиб. матем. журнал. 1963. Т. 4, № 2. С. 295–302.
92. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
93. *Кунцевич В.М., Лычак М.Н.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977.
94. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов // АиТ. 1960. № 4. С. 436–441; № 5. С. 561–568; № 6. С. 661–665; 1961. № 4. С. 425–435; 1962. № 11. С. 1405–1413.

95. *Маркушин Е.М., Шиманов С.Н.* Приближенное решение задачи аналитического конструирования для систем с запаздыванием // *АиТ.* 1968. № 3. С. 13–20.
96. *Маркушин Е.М., Шиманов С.Н.* Приближенное решение задачи аналитического регулятора для систем с запаздыванием // *Дифференц. уравнения.* 1966. Т. 2, № 8. С. 1018–1026.
97. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
98. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // *Дифференциальные уравнения.* 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618.
99. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973.
100. *Седов Ю.Н.* К задаче о стабилизации нелинейной разностной системы релейного типа // *Устойчивость и нелинейные колебания.* Свердловск, 1984. С. 69–81.
101. *Седов Ю.Н.* О стабилизации нелинейной периодической разностной системы управления релейного типа // *Устойчивость и нелинейные колебания.* Свердловск, 1988. С. 75–82.
102. *Симонов П.М.* О некоторых динамических моделях макроэкономики // *Экономическая кибернетика: математические и инструментальные методы анализа, прогнозирования и управления.* Пермь: Пермский ун-т. 2002. С. 213–231.
103. *Симонов П.М.* О некоторых динамических моделях микроэкономики // *Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика.* 2002. С. 109–114.
104. *Тарасян В.С.* Периодические системы дифференциальных уравнений с конечномерными операторами // *Дифференциальные уравнения и процессы управления.* 2002. № 4. С. 67–91.
105. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их приложения к некоторым задачам математической физики // *Бюл. МГУ. Сек. А.* 1938. Т. 1, № 8. С. 1–25.
106. *Фурасов В.Д.* Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. М.: Наука, 1982.
107. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир. 1971.
108. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1984.
109. *Цыпкин Я.З.* Оптимальные процессы в импульсных автоматических системах // *Изв. АН СССР. Энергетика и автоматика.* 1960. № 4. С. 74–93.
110. *Шабалин М.Н., Шиманов С.Н.* Задача Летова для управления с запаздыванием времени и периодическими коэффициентами // *Устойчивость и нелинейные колебания.* Сб. науч. тр. Свердловск: Изд. УрГУ. 1984. С. 89–106.

111. *Шиманов С.Н.* К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Прикл. матем. и механ. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 450–458.
112. *Шиманов С.Н.* К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1, № 1. С. 102–116.
113. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
114. *Янушевский Р.Т.* Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука. 1978. 416 с.