FILTERS BASED ON AGGREGATION OPERATORS.
Part 1. Aggregation operators

Labunets V.G.
Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin,
pr. Mira, 19, Yekaterinburg, Sverdlovsk region, 620002, Russian Federation,
ph.: 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com

Abstract — In this work we introduce and analyze a new class of nonlinear filter which have their roots in aggregation operators theory. We show that a large body of non-linear filters proposed to date constitute a proper subset of Aggregation Filters.

ФИЛЬТРЫ, ОСНОВАННЫЕ НА АГРЕГАЦИОННЫХ ОПЕРАТОРАХ.
Часть 1. Агрегационные операторы

Лабунец В.Г.
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
проспект Мира, 19, Екатеринбург, Свердловская обл.,620002, Россия
тел.: (343) 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com

Аннотация — В данной работе мы вводим и анализируем новый класс нелинейных фильтров, корни которых основываются на теории агрегационных фильтров. Мы показываем, что большой класс нелинейных фильтров, предложенных к настоящему времени являются собственным подмножеством множества агрегационных фильтров.

I. Введение

Законы функционирования дискретных динамических систем (в том числе и дискретных фильтров)

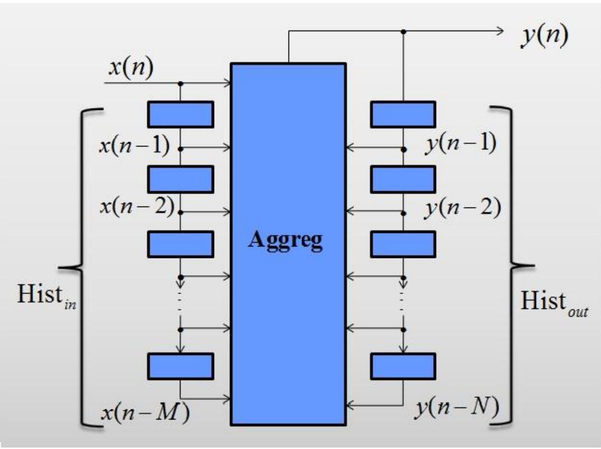

Рис. 1. Дискретная динамическая система в виде рекурсивного нелинейного фильтра

Fig. 1. Discrete dynamic system in the form of a recursive nonlinear filter

достаточно просты: реакция $y(n)$ в момент времени n на входное воздействие $x(n)$, поступившее в этот же момент времени, является некоторой функцией от $x(n)$ и M предыдущих отсчетов входного сигнала $\{x(n), x(n-1), x(n-2), ..., x(n-M)\} = \mathrm{Hist}_{in}$, которые называются предисторией на входе до момента времени n, и N отсчетов выходного сигнала $\{y(n-1), y(n-2), ..., y(n-N)\} = \mathrm{Hist}_{out}$. Последняя называется выходной историей длины N. Таким образом, реакция системы есть

$$y(n) = \mathbf{Aggreg}\{x(n), x(n-1), ..., x(n-M); \\ y(n-1), ..., y(n-N)\} = \mathbf{Aggreg}\{\mathrm{Hist}_{in}, \mathrm{Hist}_{out}\},$$

где **Aggreg** –совокупность алгебро-логических операций над входной и выходной историями. В этом случае говорят, что динамическая система обладает памятью длины M по входу и длины N по выходу.

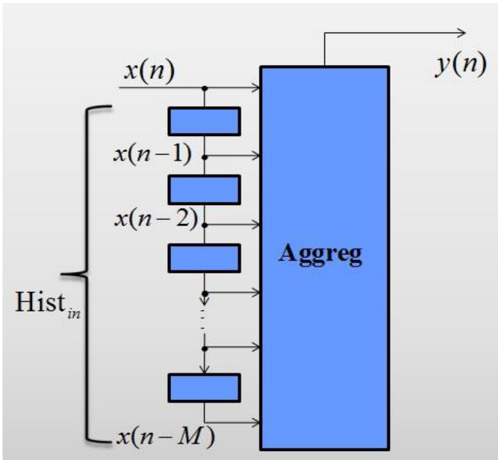

Рис. 2. Нерекурсивный нелинейный фильтр

Fig. 2. Non-recursive nonlinear filter

II. Основная часть

Очевидно, **Aggreg** – функция от $N+M+1$ переменных. Блок-схема такой системы, являющейся рекурсивным нелинейным фильтром, представлена на рис.1. Тип фильтра зависит от вида функции **Aggreg.** Если эта функция линейная

$$y(n) = \frac{1}{M+1}\{w_0 x(n) + w_1 x(n-1) + ... + w_M x(n-M)\} + \\ + \frac{1}{N}\{v_1 y(n-1) + ... + w_{N1} y(n-N)\},$$

то система является линейным рекурсивным фильтром, где $w_0, w_1, ..., w_M$ и $v_1, ..., v_N$ - совокупность весовых коэффициентов. Блок-схема нерекурсивного фильтра представлена на рис. 2. Его реакция не учитывает выходную предисторию.

Данная работа и ее последующие части посвящены синтезу нового широкого класса нелинейных нерекурсивных фильтров, основанных на так называемых агрегационных операторах [1,2].

Проблема агрегации состоит в объединении n измерений $(x_1, x_2, ..., x_n)$ некоторой физической (где $x_k \in [0, 255],\ k = 1, 2, .., n$) или логической величины, (где $x_k \in [0,1],\ k = 1, 2, .., n$) в одну величину:

$$y = \mathbf{Aggreg}(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (1)$$

Естественно, что на оператор $\mathbf{Aggreg}$ необходимо наложить разумные ограничения с тем, чтобы величина y "достойным" образом представляла n величин $(x_1, x_2, ..., x_n)$, Что значит "достойным" зависит от физической или логической задачи, подлежащей решению.

Ряд авторов [1,2] предложили несколько фундаментальных ограничений, которым должны удовлетворять агрегационные операторы, например

$$\begin{aligned}
&1)\ y = \mathbf{Aggreg}(x) = x, \\
&2)\ \mathbf{Aggreg}(0, ..., 0) = 0 \quad \mathbf{Aggreg}(1, ..., 1) = 1, \\
&3)\ y = \mathbf{Aggreg}(x_l, ..., x_n) \le \mathbf{Aggreg}(y_l, ..., y_n), \\
&\quad \text{если } (x_l, ..., x_n) \le (y_l, ..., y_n).
\end{aligned} \qquad (2)$$

Важное свойство операторов их симметрия. Для каждой перестановки σ символов $\{1, 2, ..., n\}$ агрегационный оператор должен удовлетворять следующему равенству:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Aggreg}(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \\
&= \mathbf{Aggreg}(x_1, x_2, ..., x_n).
\end{aligned} \qquad (3)$$

Еще одно фундаментальное ограничение, которое принимают во внимание

$$\begin{aligned}
&\min(x_1, x_2, ..., x_n) \le \mathbf{Aggreg}(x_1, x_2, ..., x_n) \le \\
&\le \max(x_1, x_2, ..., x_n).
\end{aligned} \qquad (4)$$

К числу наиболее популярных агрегационных операторов относятся следующие:

1) Арифметическое среднее

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Aggreg}(x_1, x_2, ..., x_n) = \\
&= \mathbf{Mean}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.
\end{aligned} \qquad (5)$$

2) Среднее по Колмогорову

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Aggreg}(x_1, x_2, ..., x_n) = \\
&= \mathbf{Kol}(K \mid x_1, x_2, ..., x_n) = K^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K(x_i)\right)
\end{aligned} \qquad (6)$$

для произвольной монотонной функции K .

4) Медиана, минимум и максимум

$$\mathbf{Med}(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\mathbf{Min}(x_1, x_2, ..., x_n),\ \mathbf{Max}(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Существуют другие многочисленные агрегационные операторы, с помощью которых строится широкое семейство нелинейных фильтров:

1) Геометрически усредняющий фильтр:

$$y(n) = \mathbf{Geo}\{\mathrm{Hist}_{in}(n), \mathrm{Hist}_{out}(n)\} = $$
$$= \left[\prod_{i=0}^{M} x(n-i)\right]^{\frac{1}{M+1}} \left[\prod_{k=1}^{N} y(n-k)\right]^{\frac{1}{N}}.$$

2) Гармонически усредняющий фильтр:

$$y(n) = \mathbf{Harm}\{\mathrm{Hist}_{in}(n), \mathrm{Hist}_{out}(n)\} = $$
$$= \left[\sum_{i=0}^{M} x^{-1}(n-i) + \sum_{k=1}^{N} y^{-1}(n-k)\right]^{-1}.$$

3) Колмогоровский усредняющий фильтр:

$$y(n) = \mathbf{Kolm}\{K \mid \mathrm{Hist}_{in}(n), \mathrm{Hist}_{out}(n)\} = $$
$$= K^{-1}\left[\frac{1}{S}\left\{K\left(x(n)\right) + \sum_{i=1}^{M} K\left(x(n-i)\right) + \sum_{i=1}^{N} K\left(y(n-i)\right)\right\}\right],$$

где $S = N + M + 1.$

4) Героновский усредняющий фильтр:

$$y(n) = \mathbf{Heron}\{\mathrm{Hist}_{in}(n), \mathrm{Hist}_{out}(n)\} = $$
$$= \frac{1}{C_{M+1}^2 + C_N^2}\left\{\sum_{k=0}^{M}\sum_{i=0}^{M-k+1}\sqrt{x(n-k-i)x(n-k-i-1)} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=0}^{M}\sum_{i=1}^{M-k+1}\sqrt{y(n-k-i)y(n-k-i-1)}\right\}.$$

где $S = N + M + 1.$

5) Степенные усредняющие фильтры:

$$y(n) = \mathbf{Power}_p\{\mathrm{Hist}_{in}(n), \mathrm{Hist}_{out}(n)\} = $$
$$= \sqrt[p]{\frac{1}{M+N+1}\left[\sum_{i=0}^{M} x^p(n-i) + \sum_{k=1}^{N} y^p(n-k)\right]}.$$

Другим агрегационным операторам будут соответствовать другие нелинейные фильтры, которым будут посвящены следующие части работы.

III. Conclusion

Представлен систематический метод синтеза широкого класса нелинейных фильтров, основанных на обобщенных средних в виде агрегационных операторов. Каждому типу агрегационного оператора соответствует вполне определенное семейство нелинейных фильтров, что позволяет провести классификацию нелинейных фильтров и изучить их свойства.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках грантов РФФИ-а № 13-07-00785, РФФИ-офи-м № 13-07-12168, а также при № 2012-финансовой поддержке гранта 218-03-167 в соответствии с договором № 02.G25.31.0055 с Минобрнауки России от «12» февраля 2013 г.

IV. References

[1] *Mayor G.,Trillas E., On the representation of some Aggregation functions. Proceeding of ISMVL, 1986, pp. 111-114.*

[2[*Ovchinnikov S., On Robust Aggregation Procedures, Aggregation Operators for Fusion under Fuzziness. Bouchon-Meunier B. (eds.), 1998, pp. 3-10.*