FILTERS BASED ON AGGREGATION OPERATORS.
Part 4. Generalized vector median filters

Labunets V.G., Gainanov D.N., Arslanova R. A.[1], Ostheimer E.[2]
[1]*Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin*
pr. Mira, 19, Yekaterinburg, Sverdlovsk region, 620002, Russian Federation
ph.: 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com
[2]*Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA*

Abstract — In this work, a new class of nonlinear filters called vector median aggregation filters for multispectral image processing is introduced and applied to the color image filtering problem. These filters are based on an arbitrary pair of aggregation operators and a selection rule. We show that a large body of vector median filters proposed to date constitute a proper subset of new vector median aggregation filters set.

ФИЛЬТРЫ,ОСНОВАННЫЕ НА АГРЕГАЦИОННЫХ ОПЕРАТОРАХ
Часть 4. Обобщенные векторные медианные фильтры

Лабунец В.Г., Гайнанов Д.Н., Арсланова Р. А.[1], Остхаймер Е.[2]
[1]*Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина*
проспект Мира, 19, Екатеринбург, Свердловская обл.,620002, Россия
тел.: (343) 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com
[2]*Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA*

Аннотация — В данной работе вводится новый класс нелинейных фильтров для обработки мультиспектральных изображений, названный векторными медианными агрегационными фильтрами. Они основываются на произвольной паре агрегационных операторов и одном селекционном правиле. Мы показываем, что большое множество векторных медианных фильтров, предложенных к настоящему времени, являются собственным подмножеством множества новых фильтров.

I. Введение

Медианная фильтрация широко используется в обработке изображений в качестве "фильтра, сохраняющего перепады яркости". Как известно, медиана минимизирует суммарную L_1 норму между всеми пикселями окна. В векторном случае нам необходимо определить расстояние между парой пикселей. Пусть $\langle \mathbf{D}, \rho \rangle$ - метрическое пространство в области значений изображения, где ρ - расстояние между парой объектов из $\langle \mathbf{D}, \rho \rangle$ (т.е., $\rho : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \to \mathbf{R}^+$). Пусть $w_1, w_2, ..., w_N$ - набор из N нормированных весов и пусть $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^N \in \mathbf{D} \subset \mathbf{R}^n$ - множество из N измерений в $\langle \mathbf{D}, \rho \rangle$.

Определение 1 [1.2]**.** Взвешенной Фреше медианой (или обобщенной векторно-значной медианой) называется точка, $\mathbf{c}_{opt} \in \mathbf{D}$, минимизирующая функцию $\sum_{i=1}^{N} w_i \rho\left(\mathbf{c}, \mathbf{x}^i\right)$ (взвешенная сумма расстояний от произвольно точки до каждой из точек $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^N \in \mathbf{D} \subset \mathbf{R}^K$) и формально определяется так

$$\mathbf{c}_{opt} = \mathbf{Frech}\left(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^N\right) =$$
$$= \mathbf{VectMed}\left(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^N\right) = \mathbf{arg}\min_{\mathbf{c} \in \mathbf{D}} \sum_{i=1}^{N} w_i \rho\left(\mathbf{c}, \mathbf{x}^i\right). \quad (1)$$

Это определение обобщает обычную медиану на пространства высших размерностей. Определение геометрической медианы верно и для Евклидовых и для Римановских пространств[1,2]. Векторно-значная медина зависит от того, какая метрика изначально выбрана в метрическом пространстве $\langle \mathbf{D}, \rho \rangle$. Это имеет место уже в одномерных пространствах

Example 1. Arithmetic mean. Если D - есть поле действительных чисел, то выбирая Евклидову метрику, получаем $\rho(x, y) = (x - y)^2$, то получаем обобщенную медиану в виде обычного среднего.

Example 2. Geometric mean. На множестве положительных реальных чисел можно выбрать расстояние таким образом: $\rho(x, y) = |\log x - \log y|$. В этом случае медиана Фреше превaращается в геометрическое среднее

Example 3. The Kolmogoov mean. Для любой монотонной функции K, мы вводи метрику $\rho(a, b) = \left|K(a) - K(b)\right|$. В этом случае медиана Фреше превращается в среднее по Колмогорову.

Нетрудно видеть, что все расстояния в $\langle \mathbf{D}, \rho \rangle$ имеют форму некоторой агрегационной функции. Поэтому целесообразно метрику ρ заменить такой функцией.

II. Основная часть

Пусть $\mathbf{D}$ область значений многоканального изображения $\langle \mathbf{D}, \rho\text{-}\mathbf{Aggreg} \rangle$), где ρ-**Aggreg** некоторая агрегационная функция в $\mathbf{D}$, т.е.

$$d\text{-}\mathbf{Aggreg} : \mathbf{D} \times \mathbf{D} \to \mathbf{R}^+ :$$

$$\rho\text{-}\mathbf{Aggreg}(\mathbf{c},\mathbf{x}) = \\ = \mathbf{Aggreg}(c_1 - x_1, c_2 - x_2, ..., c_n - x_n), \quad (2)$$

Тогда можно определить новый обобщенный агрегационный оператор векторно-медианного типа следующим образом

$$^{r}\mathbf{OSVectAgg}\left(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^N\right) := \\ = \arg\, \underset{\mathbf{c}}{^{r}\mathbf{OS}}\Big[\mathbf{Aggreg}_2\Big(\rho\text{-}\mathbf{Aggreg}_1\left(\mathbf{c},\mathbf{x}^1\right), \\ \rho\text{-}\mathbf{Aggreg}_1\left(\mathbf{c},\mathbf{x}^2\right), ..., \rho\text{-}\mathbf{Aggreg}_1\left(\mathbf{c},\mathbf{x}^N\right)\Big)\Big], \quad (3)$$

где r - ранг порядковой статистики ($^{r}\mathbf{OS} = \mathbf{Min}$, $^{r}\mathbf{OS} = \mathbf{Med}$, $^{r}\mathbf{OS} = \mathbf{Max}$, когда $r = 1$, $r = n/2, r = N$, соответственно). $^{r}\mathbf{OSVectAgg}$ зависит от двух агрегационных опереторов и одного селекционного правила $^{r}\mathbf{OS}$,

$$^{r}\mathbf{OSVectAgg} = \\ = {}^{r}\mathbf{OSVectAgg}\left({}^{r}\mathbf{OS}, \rho\text{-}\mathbf{Aggreg}_1, \mathbf{Aggreg}_2\right). \quad (4)$$

Если $\mathbf{Aggreg}_2 = \sum$ и $^{r}\mathbf{OS} = \mathbf{Min}$, то

$$^{r}\mathbf{OSVectAgg}\left(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, ..., \mathbf{x}^N\right) := \\ = \arg\min_{\mathbf{c}} \sum_{i=1}^{N} \rho\text{-}\mathbf{Aggreg}\left(\mathbf{c},\mathbf{x}^i\right) \quad (5)$$

и если $\rho\text{-}\mathbf{Aggreg}\left(\mathbf{c},\mathbf{x}^i\right) = \rho\left(\mathbf{c},\mathbf{x}^i\right)$ - метрика, то мы имеем медиану Фреше.

Введем модель наблюдаемого сигнала

$$\vec{\mathbf{f}}_{Mcol}(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{s}}_{Mcol}(\mathbf{x}) + \vec{\boldsymbol{\eta}}_{Mcol}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где $\vec{\mathbf{s}}_{Mcol}(\mathbf{x})$ полезное K-канальное изображение

$$\vec{\mathbf{s}}_{Mcol}(\mathbf{x}) = \left(s_1(\mathbf{x}), s_2(\mathbf{x}), ..., s_K(\mathbf{x})\right),$$

а $\vec{\boldsymbol{\eta}}_{Mcol}(\mathbf{x})$ обозначает аддитивный шум

$$\vec{\boldsymbol{\eta}}_{Mcol}(\mathbf{x}) = \left(\eta_1(\mathbf{x}), \eta_2(\mathbf{x}), ..., \eta_K(\mathbf{x})\right),$$

добавленный к полезному сигналу $\vec{\mathbf{s}}_{Mcol}(\mathbf{x})$, в результате чего получается зашумленное изображение $\vec{\mathbf{f}}_{Mcol}(\mathbf{x})$. Здесь $\mathbf{x} = (i, j) \in \mathbf{Z}^2$ (или $\mathbf{x} = (i, j, k) \in \mathbf{Z}^3$) - 2D (или - 3D) координаты, обозначающие локализацию соответствующего пикселя $f(\mathbf{x})$. Если $\mathbf{x} \in \mathbf{Z}^2, \mathbf{Z}^3$, то $\vec{\mathbf{f}}_{Mcol}(\mathbf{x}), \vec{\mathbf{s}}_{Mcol}(\mathbf{x})$, и $\vec{\boldsymbol{\eta}}_{Mcol}(\mathbf{x})$ - 2D или 3D изображения, соответственно.

Цель фильтрации – устранения шума в изображении настолько, насколько это возможно. Это означает, что нужно найти такой метод оценки полезного сигнала $\vec{\mathbf{s}}_{Mcol}(\mathbf{x})$, при котором оценка $\hat{\vec{\mathbf{s}}}_{Mcol}(\mathbf{x})$ в максимальной степени похожа на полезный сигнал $\vec{\mathbf{s}}_{Mcol}(\mathbf{x})$.

В усредняющем 2D фильтре с квадратной скользящей маской $\left[\mathrm{M}_{(i,j)}(m,n)\right]_{m=-r,n=-r}^{m=+r,n=+r}$ размером $N = (2r+1)\times(2r+1)$, локализованной в точке (i, j), пиксель $\vec{\mathbf{f}}_{Mcol}(i, j)$ заменяется средним значением всех пикселей, попавших внутрь этой маски:

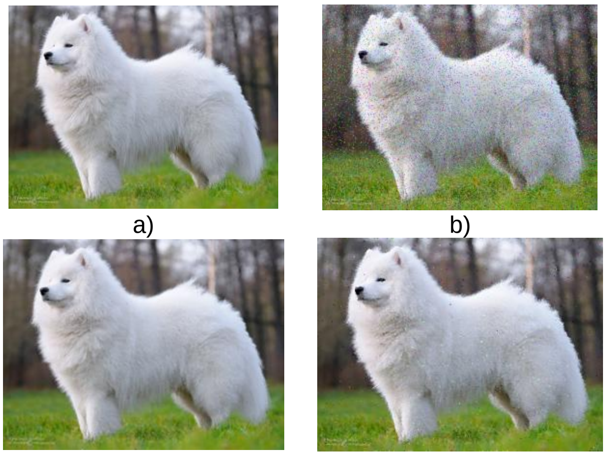
$$\hat{\vec{\mathbf{s}}}_{Mcol}(i, j) = \underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{Mean}} \left\{\vec{\mathbf{f}}_{Mcol}(m,n)\right\},$$

где $\hat{\vec{\mathbf{s}}}_{Mcol}(\mathbf{x})$ - оценка сигнала, и $\left\{\vec{\mathbf{f}}_{Mcol}(m,n)\right\}_{(m,n)\in M_{(i,j)}}$ - обозначает фрагмент изображения, выделенный из $\vec{\mathbf{f}}_{Mcol}$, движущейся маской $\mathrm{M}_{(i,j)}$ и находящейся в позиции (i, j). Когда этот фильтр модифицируется так

$$\hat{\vec{\mathbf{s}}}_{Mcol}(i, j) = \underset{(k,l)\in M(i,j)}{^{r}\mathbf{OSVectAgg}} \left\{\vec{\mathbf{f}}_{Mcol}(k,l)\right\},$$

то получается агрегационный фильтр, свойства которого зависят от агрегационного оператора $\mathbf{VectAgg}$ и решающего правила $^{r}\mathbf{OS}$

На рис.1 представлены два случая: Fig.1c: $\rho\text{-}\mathbf{Aggreg}_1 = \rho_1, \mathbf{Aggreg}_2 = \mathbf{Mean}$, $^{r}\mathbf{OS} = \mathbf{Min}$, $\mathrm{PSNR} = 32.2$ $\mathrm{SSIM} = 0.81$ и Рис.1d: $\rho\text{-}\mathbf{Aggreg}_1 = \rho_2$, $\mathbf{Aggreg}_2 = \mathbf{Mean}$, $^{r}\mathbf{OS} = \mathbf{Min}$, $\mathrm{PSNR} = 27{,}4$, $\mathrm{SSIM} = 0{,}68$.



a) b) c) d)

Fig. 1. Original (a) and noise (b) images. Denoised images (c) and (d).

Рис. 1. Исходное (a) и зашумленное (b) изображения. Отфильтрованные изображения (c) и (d).

III. Заключение

Введен новый класс нелинейных векторных медианных фильтров для фильтрации гиперспектральных изображений. Введенные фильтры зависят от множества независимых параметров. Для каждого конкретного набора их значений получается уникальный класс нелинейных векторных фильтров.

Работа была поддержана грантами РФФИ № 13-07-12168, РФФИ № 13-07-00785 и грантом МОН РФ t №218-03-167 (согласно постановлению МОН РФ № 02.G25.31.0055 от 12.02. 2013).

IV. References

[1] Bajaj C. Proving geometric algorithms nonsolvability: An application of factoring polynomials. *Jornal of Symbolic Computaton*, 1986, No. 2, pp. 99–102.

[2] Bajaj C. The algebraic degree of geometric optimization problems. *Discrete and Computation Geometry*, 1988, No. 3, pp. 177–191.