Математические заметки

Том 0 выпуск 0 июнь 1966

УДК 517.5

Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям

Р. Р. Акопян

Решена задача оптимального восстановления аналитической функции по ее значениям на части границы, заданным с погрешностью, и родственные экстремальные задачи.

Библиография: 18 названий.

1. Пусть G — односвязная ограниченная область комплексной плоскости с границей Γ, являющейся замкнутой жордановой спрямляемой кривой. Через γ обозначим произвольное измеримое по Лебегу подмножество кривой Γ, имеющее положительную меру.

Рассмотрим пространство Харди $H(G)$ функций, аналитических и ограниченных на области G с нормой

$$\|f\|_{H(G)} = \sup\{|f(z)| \,:\, z \in G\}.$$

Известно (см., например, [1; Гл.III, §1, п.1.7]), что для произвольной функции f из пространства $H(G)$ почти всюду на Γ существуют некасательные предельные граничные значения, которые составляют функцию (которую также обозначим f) из пространства $L^\infty(\Gamma)$, при этом имеет место равенство

$$\|f\|_{H(G)} = \|f\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

В пространстве $H(G)$ выделим класс Q функций, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L^\infty(\Gamma\setminus\gamma)} \leqslant 1.$$

Обозначим через Υ_z функционал, определенный на подпространстве $L^\infty(\gamma)$ функций, являющихся граничными значениями на γ функций пространства $H(G)$, и ставящий в соответствие граничным значениям аналитической функции на γ ее значение в точке z области G, то есть задаваемый равенством

$$\Upsilon_z f = f(z).$$

В настоящей работе на классе Q рассматриваются несколько взаимосвязанных экстремальных задач для функционала Υ_z.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Функцию вещественного переменного $\delta \in [0,\infty)$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; \Upsilon_z, Q) = \sup\left\{|f(z)| \,:\, f \in Q,\ \|f\|_{L^\infty(\gamma)} \leqslant \delta\right\}, \tag{1.1}$$

называют модулем непрерывности функционала Υ_z на классе Q. Помимо значений величины $\omega(\delta)$ интерес представляет экстремальная функция, на которой в (1.1) достигается верхняя грань.

Через $\Omega(\delta,\Delta) = \Omega(\delta,\Delta;\Upsilon_z)$ обозначим неотрицательную функцию двух неотрицательных переменных δ и Δ, определяемую равенством

$$\Omega(\delta,\Delta) = \Omega(\delta,\Delta;\Upsilon_z) = \sup\left\{|f(z)| \,:\, \|f\|_{L^\infty(\gamma)} \leqslant \delta,\ \|f\|_{L^\infty(\Gamma\setminus\gamma)} \leqslant \Delta\right\}. \tag{1.2}$$

Довольно очевидно, что имеют место соотношения

$$\omega(\delta) = \Omega(\delta,1),\ \delta \geqslant 0; \quad \Omega(\delta,\Delta) = \Delta\,\omega(\delta/\Delta),\ \delta \geqslant 0,\ \Delta > 0;$$

так что задачи о вычислении величин (1.1) и (1.2) эквивалентны. Из определения (1.2) следует, что для функций пространства $H(G)$ справедливо точное неравенство

$$|f(z)| \leqslant \Omega\left(\|f\|_{L^\infty(\gamma)}, \|f\|_{L^\infty(\Gamma\setminus\gamma)}\right).$$

В дальнейших рассуждениях будет существенно использоваться гармоническая мера подножеств границы области; напомним ее определение (см., например, [2; Гл.VIII, §4]). Пусть $\mathfrak{u}(\zeta) = \mathfrak{u}(\zeta,\gamma,G),\ \zeta \in G$, есть гармоническая в области G функция, имеющая почти всюду на γ граничные значения, равные единице, и на $\Gamma\setminus\gamma$ — равные нулю. Значение $\mathfrak{u}(z,\gamma,G)$ этой функции в точке $z \in G$ как раз и называется гармонической мерой множества γ относительно точки z и области G. Для гармонической меры справедливо представление

$$\mathfrak{u}(z,\gamma,G) = \int_\gamma P_G(\zeta,z)dl,$$

в котором $P_G(\cdot,z)$ — ядро Пуассона области G для точки z.

Обозначим через $\phi = \phi[G,\gamma]$ функцию, определяемую равенством

$$\phi(z) = \exp\left(\mathfrak{u}(z) + i\mathfrak{v}(z)\right), \tag{1.3}$$

где $\mathfrak{u}(z) = \mathfrak{u}(z,\gamma,G)$ – гармоническая мера γ относительно точки z и множества G, а $\mathfrak{v}$ — гармонически сопряженная к $\mathfrak{u}$ функция в области G. Ясно, что для произвольного вещественного σ функция

$$\phi^\sigma(z) = \exp\left(\sigma(\mathfrak{u}(z) + i\mathfrak{v}(z))\right)$$

также является аналитической и ограниченной, то есть $\phi^\sigma \in H(G)$. Более того,

$$|\phi^\sigma(\zeta)| = \exp\left(\sigma\mathfrak{u}(\zeta)\right) = 1,\ \ \zeta \in \Gamma\setminus\gamma.$$

Следовательно, для произвольного вещественного σ функция ϕ^σ принадлежит классу Q.

Решение задач (1.1) и (1.2) легко следует из известного результата Ф. и Р. Неванлинна [3] (см. также [2; Гл.VIII, §4, теорема 1]) и приведено в следующей теореме.

Теорема A *Для функций ω и Ω, определенных соотношениями* (1.1) *и* (1.2), *справедливы равенства*

$$\omega(\delta) = \delta^{\alpha}, \quad \Omega(\delta, \Delta) = \delta^{\alpha}\,\Delta^{1-\alpha}, \quad \alpha = \mathfrak{u}(z, \gamma, G). \tag{1.4}$$

При этом верхняя грань в (1.1) *достигается на функции ϕ^{σ}, $\sigma = \ln\delta$, а в* (1.2) *— на функции $\Delta\phi^{\sigma}$, при $\sigma = \ln(\delta/\Delta)$.*

2. На классе функций Q рассмотрим две взаимосвязанные экстремальные задачи. Первой является задача оптимального восстановления значения аналитической функции в конкретной точке z области. Пусть для неизвестной функции f из класса Q задана функция $q \in L^{\infty}(\gamma)$ такая, что $\|f - q\|_{L^{\infty}(\gamma)} \leqslant \delta$. Иными словами, заданы граничные значения функции f с погрешностью δ на части границы γ. Мы хотим наилучшим (оптимальным) способом восстановить по q значение $f(z)$. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$, из которых выбирается оптимальный, будем рассматривать $\mathcal{O}$ — множество всех возможных, или $\mathcal{L}$ — линейных, функционалов на $L^{\infty}(\gamma)$. Точная постановка задачи следующая. Для числа $\delta \geqslant 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{R}$ определим величину погрешности метода формулой

$$\mathcal{U}(T, \delta) = \sup\left\{|f(z) - Tq| \ : \ f \in Q,\, q \in L^{\infty}(\gamma),\, \|f - q\|_{L^{\infty}(\gamma)} \leqslant \delta\right\}. \tag{2.1}$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf\left\{\mathcal{U}(T, \delta) \ : \ T \in \mathcal{R}\right\} \tag{2.2}$$

есть величина оптимального восстановления аналитической функции в точке z (или, что то же самое, оптимального восстановления функционала Υ_z) с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$ на функциях класса Q по их граничным значениям на γ, заданным с ошибкой δ. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – функционала, на котором в (2.2) достигается нижняя грань.

Задача (2.2) есть частный случай задачи оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной и/или неточной информации. Общие результаты в этой тематике и дальнейшие ссылки можно найти в [4], [5], [6], [7], [8], [9]. Результаты, связанные с задачами оптимального восстановления на классах аналитических функций можно найти в монографии [9].

Известно (см. [10], [6], [11], [8], [9] и приведенную там библ.), что в задаче оптимального восстановления линейного функционала на выпуклом центрально симметричном классе с помощью множества $\mathcal{O}$ всех возможных функционалов существует оптимальный линейный метод и сама величина оптимального восстановления равна модулю непрерывности восстанавливаемого функционала. Следовательно, с учетом теоремы A, справедливы равенства

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \omega(\delta) = \delta^{\alpha}. \tag{2.3}$$

Вторая рассматриваемая в работе задача — задача наилучшего приближения функционала Υ_z линейными ограниченными функционалами. Точная постановка задачи такова. Пусть $\mathcal{L}(N)$ — множество линейных ограниченных функционалов в $L^{\infty}(\gamma)$, норма которых не превосходит числа $N \geqslant 0$. Величина

$$U(T) = \sup\left\{|f(z) - Tf| \ : \ f \in Q\right\} \tag{2.4}$$

является уклонением функционала $T \in \mathcal{L}(N)$ от функционала Υ_z на классе Q. Соответственно, величина

$$E(N) = \inf \{U(T) \ : \ T \in \mathcal{L}(N)\} \tag{2.5}$$

есть наилучшее приближение функционала Υ_z множеством линейных ограниченных функционалов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q. Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$ и найти экстремальный функционал, на котором в (2.5) достигается нижняя грань.

Задача (2.5) является частным случаем задачи Стечкина приближения неограниченного оператора линейными ограниченными на классе элементов банахова пространства. Исследования этой задачи началось в 1965-67 годах с работ С.Б. Стечкина [12], [13] и имеют богатую историю (см. работы [4], [6], [8] и приведенную в них библ.). Наиболее полно исследована задача наилучшего приближения неограниченного функционала и взаимосвязь с задачей его оптимального восстановления (см. работы [10], [6], [11], [8], [9] и библ. там).

В частности, для задач (2.2) и (2.5) эта взаимосвязь выражается в следующем соотношении

$$E(N) = \inf \{\omega(\delta) - \delta N \, : \, \delta \in [0, \infty)\} = \inf \{\delta^\alpha - \delta N \, : \, \delta \in [0, \infty)\},$$

и, следовательно,

$$E(N) = \beta \alpha^{\alpha/\beta} N^{-\alpha/\beta}, \quad \beta = 1 - \alpha, \quad \alpha = \mathfrak{u}(z, \gamma, G). \tag{2.6}$$

Таким образом, к настоящему моменту величины $\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta)$, $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta)$, $E(N)$ известны. Для решения задач (2.2) и (2.5) остается найти экстремальные функционалы.

3. Так как множество γ имеет положительную меру, то оно является множеством единственности (см., например, [2; Гл.X, §2]) для функций пространства $H(G)$. Метод восстановления функции $f \in H(G)$ по ее (точным) граничным значениям на γ дает формула Карлемана – Голузина – Крылова [14] (см. также [15])

$$\forall z \in G \quad f(z) = \lim_{\sigma \to -\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \left(\frac{\varphi(z)}{\varphi(\zeta)} \right)^\sigma d\zeta, \tag{3.1}$$

где φ произвольная функция из $H(G)$, удовлетворяющая условиям

$$|\varphi(\zeta)| = 1, \ \zeta \in \Gamma \setminus \gamma; \quad |\varphi(z)| > 1, \ z \in G.$$

В качестве функции φ в формуле (3.1) может выступать и функция (1.3).

В случае, когда граничные значения функции на γ заданы с погрешностью, задача восстановления значения в точке z (аналитического продолжения с части границы области) является некорректной. При определенных условиях на множество G, его границу и множество γ эта задача исследовалась М.М.Лаврентьевым [16; Гл.II, §1, п. 4-5] (см. также [15; Гл.I, §2]). Предложенные методы регуляризации имеют в качестве ядра введеные и названные им функции Карлемана, являющиеся по сути аппроксимациями ядра Коши. Примером такого регуляризующего метода является конструкция, основанная на формуле Карлемана – Голузина – Крылова. Регуляризирующий метод (метод восстановления) R_σ здесь имеет следующий вид

$$(R_\sigma q)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{q(\zeta)}{\zeta - z} \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)}\right)^\sigma d\zeta. \tag{3.2}$$

Применив приведенные ниже рассуждения к методу (3.2) можно показать, что этот метод, при выборе параметра регуляризации $\sigma = \ln\delta$, является по порядку оптимальным в задаче (2.2), точнее справедливо равенство

$$\mathcal{U}(R_\sigma, \delta) = c(z)\delta^\alpha, \ \ \alpha = \mathfrak{u}(z, \gamma, G).$$

Множитель $c(z)$ удовлетворяет соотношению $c(z) \geqslant \int_\gamma |z - \zeta|^{-1} ds$, и потому неограничен в области G.

4. Нашей целью является построение наилучшего (оптимального) метода. Рассмотрим функционал T_σ на $L^\infty(\gamma)$, определяемый равенством

$$(T_\sigma q)(z) = \int_\gamma P_G(\zeta, z) \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)}\right)^\sigma q(\zeta)\, ds, \tag{4.1}$$

где $P_G(\cdot, z)$ — ядро Пуассона области G для точки z, а функция ϕ определена соотношением (1.3). Вычислим для функционала T_σ, заданного равенством (4.1), его норму и уклонение (2.4).

Лемма 1. *Для функционала* (4.1) *при* $\sigma = \ln\delta$ *имеют место равенства*

$$\|T_\sigma\| = \alpha\, \delta^{-\beta}, \quad U(T_\sigma) = \beta\, \delta^\alpha. \tag{4.2}$$

Доказательство. Напомним, что $\phi^\sigma \in Q \subset H(G)$ для всех $\sigma \in \mathbb{R}$, а при выборе $\sigma = \ln\delta$ для граничных значений имеет место равенства

$$|\phi^\sigma(\zeta)| = \begin{cases} \delta, & \zeta \in \gamma, \\ 1, & \zeta \in \Gamma \setminus \gamma, \end{cases}$$

$$|\phi^\sigma(z)| = \delta^\alpha, \ \ \alpha = \mathfrak{u}(z, \gamma, G).$$

В силу неотрицательности ядра Пуассона P_G, для нормы T_σ имеем оценку сверху

$$\|T_\sigma\| = \sup\left\{ \left| \int_\gamma P_G(\zeta, z) \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)}\right)^\sigma q(\zeta)\, ds \right| \, : \, q \in L^\infty(\gamma), \, \|q\|_{L^\infty(\gamma)} \leqslant 1 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \int_\gamma P_G(\zeta, z)\, ds\ |\phi^\sigma(z)|\, \delta^{-1} = \alpha\, \delta^{\alpha - 1} = \alpha\, \delta^{-\beta}.$$

С другой стороны, рассматривая в качестве q граничные значения на γ функции $\delta^{-1}\phi^\sigma$, получаем оценку снизу

$$\|T_\sigma\| \geqslant \left| \int_\gamma P_G(\zeta, z) \left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)}\right)^\sigma \delta^{-1}\phi^\sigma(\zeta)\, ds \right| =$$

$$\int_\gamma P_G(\zeta, z)\, ds\ |\phi^\sigma(z)|\, \delta^{-1} = \alpha\, \delta^{\alpha - 1} = \alpha\, \delta^{-\beta}.$$

Таким образом, действительно, $\|T_\sigma\| = \alpha\,\delta^{-\beta}$.

Теперь вычислим уклонение (2.4) для оператора T_σ. Применяя формулу Пуассона для аналитической и ограниченной в области G функции f/ϕ^σ, имеем равенство

$$\frac{f(z)}{\phi^\sigma(z)} = \int_\Gamma P_G(\zeta,z)\,\frac{f(\zeta)}{\phi^\sigma(\zeta)}\,ds.$$

Отсюда получим представление уклонения (2.4) для функционала T_σ :

$$U(T_\sigma) = \sup\left\{\left|f(z) - \int_\gamma P_G(\zeta,z)\left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)}\right)^\sigma f(\zeta)\,ds\right| \,:\, f\in Q\right\} =$$

$$= \sup\left\{\left|\int_{\Gamma\setminus\gamma} P_G(\zeta,z)\left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)}\right)^\sigma f(\zeta)\,ds\right| \,:\, f\in Q\right\}.$$

Это представление влечет оценку

$$U(T_\sigma) \leqslant \int_{\Gamma\setminus\gamma} P_G(\zeta,z)\,ds\;|\phi^\sigma(z)| = \beta\,\delta^\alpha.$$

Для оценки уклонения снизу рассмотрим в качестве f функцию ϕ^σ; как уже было сказано выше, она принадлежит классу Q. В результате получаем соотношение

$$U(T_\sigma) \geqslant \left|\int_{\Gamma\setminus\gamma} P_G(\zeta,z)\left(\frac{\phi(z)}{\phi(\zeta)}\right)^\sigma \phi^\sigma(\zeta)\,ds\right| = \int_{\Gamma\setminus\gamma} P_G(\zeta,z)\,ds\;|\phi^\sigma(z)| = \beta\,\delta^\alpha.$$

Тем самым доказано, что $U(T_\sigma) = \beta\,\delta^\alpha$. Лемма 1 доказана.

Для произвольного $N>0$ выберем δ так чтобы $N = \alpha\delta^{-\beta}$. В силу (4.2) имеем для уклонения $U(T_\sigma)$ выражение

$$U(T_\sigma) = \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}. \tag{4.3}$$

Объединяя вместе равенства (2.6) и (4.3), получим следующее утверждение о задаче наилучшего приближения функционала (2.5).

Теорема 1. *Для произвольного $N>0$ справедливо равенство*

$$E(N) = \beta\,\alpha^{\alpha/\beta}\,N^{-\alpha/\beta}.$$

При этом функционалом наилучшего приближения является функционал T_σ, определяемый соотношением (4.1) *с параметром σ, задаваемым равенством*

$$\sigma = -\frac{1}{\beta}\,\ln\frac{N}{\alpha}.$$

5. Полученные только что результаты позволяют выписать решение задачи (2.2). Вычислим вначале величину погрешности (2.1) для метода T_σ.

Лемма 2. *Для функционала, определяемого соотношением* (4.1), *при $\sigma = \ln\delta$ имеет место равенство*

$$\mathcal{U}(T_\sigma,\delta) = \delta^\alpha. \tag{5.1}$$

Доказательство. Оценку сверху уклонения $\mathcal{U}(T_\sigma,\delta)$ получим, используя лемму 1. Имеем

$$\mathcal{U}(T_\sigma,\delta)=\sup\left\{|f(z)-T_\sigma q|\ :\ f\in Q,\, q\in L^\infty(\gamma),\, \|f-q\|_{L^\infty(\gamma)}\leqslant\delta\right\}\leqslant$$
$$\leqslant \sup\{|f(z)-T_\sigma f|\ :\ f\in Q\}+$$
$$\sup\left\{|T_\sigma(f-q)|\ :\ f\in Q,\, q\in L^\infty(\gamma),\, \|f-q\|_{L^\infty(\gamma)}\leqslant\delta\right\}\leqslant$$
$$\leqslant U(T_\sigma)+\|T_\sigma\|\delta=\beta\,\delta^\alpha+\alpha\,\delta^{-\beta}\cdot\delta=\delta^\alpha.$$

Выбор $q\equiv 0$ и $f=\phi^\sigma$ дает оценку уклонения снизу

$$\mathcal{U}(T_\sigma,\delta)\geqslant|\phi^\sigma(z)|=\delta^\alpha.$$

Лемма доказана.

Равенства (2.3) и (5.1) позволяют сформулировать следующее утверждение о задаче оптимального восстановления (2.2).

Теорема 2. *Для произвольного* $\delta>0$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta)=\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta)=\omega(\delta)=\delta^\alpha.$$

При этом оптимальным методом восстановления является метод T_σ, *определяемый соотношением* (4.1) *с параметром* σ, *задаваемым равенством*

$$\sigma=\ln\delta.$$

6. В заключение отметим, что наложенные в данной статье требования на область не являются необходимыми для справедливости утверждений теорем 1 и 2. Так в работе [17] получены аналоги теорем 1 и 2 в случае когда G — полоса, γ — одна из граничных прямых. В работе [18] аналогичные результаты получены в случае когда G есть кольцо, γ — одна из граничных окружностей и параметр δ равен целой степени отношения радиусов граничных окружностей.

7. Автор выражает благодарность В.В.Арестову и Н.Ю.Антонову за полезные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.*, ГИ ТТЛ, М.,Л., 1950.

[2] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, ГИТТЛ, М.,Л., 1966.

[3] F. Nevanlinna, R. Nevanlinna, “Über die Eigenschaften einer analyticchen Funktionen in der Umgeburg einer singularen Stille oder Linie”, *Acta Soc. sci. fenn.,5*, **50** (1922), 1–46.

[4] В. В. Арестов, “О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора”, *Матем. заметки*, **22:2** (1977), 231–244.

[5] Ch. A. Micchelli, Th. J. Rivlin, “A survey of optimal recovery”, *Optimal estimation in approximation theory*, Plenum Press, N.Y. etc., 1977, 1–54.

[6] В. В. Арестов, “Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций (Душанбе, август 1986 г.), Тр. МИАН СССР*, **189** (1989), 3–20.

[7] В. В. Арестов, В. Н. Габушин, “Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными”, *Изв. вузов. Матем., 11*, 1995, 42–68.

[8] В. В. Арестов, “Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи”, *Успехи мат. наук, 6(312)*, **51** (1996), 89–124.

[9] K. Yu. Osipenko, *Optimal Recovery of Analytic Functions*, NJVA Science Publ.Inc., Huntington, 2000.

[10] В. Н. Габушин, “Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах”, *Матем. заметки*, **8:5** (1970), 551–562.

[11] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50:6** (1991), 85–93.

[12] С. Б. Стечкин, “Неравенства между нормами производных произвольной функции”, *Acta Sci. Math., no. 3-4*, **26** (1965), 225–230.

[13] С. Б. Стечкин, “Наилучшее приближение линейных операторов”, *Матем. заметки*, **1:2** (1967), 137–148.

[14] Г. М. Голузин, В. И. Крылов, “Обобщенная формула Carleman‘a и приложение ее к аналитическому продолжению функций”, *Матем. сборник, 2*, **40** (1933), 144–149.

[15] Л. А. Айзенберг, *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения*, Наука, Новосибирск, 1990.

[16] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа.*, Наука, М., 1980.

[17] Р. Р. Акопян, “Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в полосе функций”, *Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН, 3*, **17** (2011), 46–54.

[18] Р. Р. Акопян, “Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в кольце функций”, *Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН, 4*, **18** (2012), 3–13.

Р. Р. Акопян
Озерский технологический институт Национального исследовательского ядерного университета МИФИ, г. Озерск
Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета, г. Екатеринбург
E-mail: `RRAkopyan@mephi.ru`

Поступило
31.01.2015
Исправленный вариант
00.00.2015