УДК 517.51

ОЦЕНКИ СНИЗУ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ СОСТАВНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СО СВОЙСТВОМ ГЛАДКОСТИ [1]

Н.В.Байдакова

Рассматривается естественный класс составных конечных элементов, обеспечивающих гладкость порядка m результирующей кусочно-полиномиальной функции на триангулированной области и не требующих наличия информации о соседних элементах. Известно, что для обеспечения должной скорости сходимости в методе конечных элементов на триангуляцию исходной области часто приходится накладывать "условие наименьшего угла", т. е. ограничивать снизу наименьшие возможные значения наименьших углов треугольников. С другой стороны, отрицательную роль наименьшего угла можно ослабить (но не исключить полностью) за счет выбора подходящих условий интерполяции. Ранее было показано, что для большого множества способов выбора условий интерполяции при построении простых (не составных) конечных элементов, в том числе традиционных, при $m \geq 1$ влияние наименьшего угла треугольника на величину погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционного многочлена является существенным для ряда производных порядка 2 и выше. В данной работе подобный результат доказывается для некоторого класса составных конечных элементов.

Ключевые слова: многомерная интерполяция, метод конечных элементов, аппроксимация, условие наименьшего угла, сплайны на триангуляциях.

1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – некоторая область плоскости; $W^{n+1}M$ — множество функций, непрерывных на Ω вместе со всеми своими частными производными до порядка $n+1$ включительно, у которых все производные порядка $n+1$ ограничены по модулю константой M. Пусть множество треугольников $\Delta = \{T_1, T_2, \ldots, T_N\}$ – триангуляция области Ω, т. е. $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{N} T_i$, и любые два треугольника T_i и T_j либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину или общую сторону. Если два треугольника имеют общую сторону, их называют соседними.

Рассмотрим произвольный треугольник $T = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \in \Delta$ из триангуляции. Пусть T является составным конечным элементом, т. е. триангулирован на k

[1]Работа выполнена в рамках программы Отделения математических наук РАН "Современные проблемы теоретической математики" при поддержке УрО РАН (проект 12-Т-1-1003/4), при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00347) и программы интеграционных проектов, выполняемых совместно учеными УрО РАН и СО РАН (проект 12-С-1-1018).

треугольников $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_k$. Будем рассматривать только разбиения треугольника T со следующим свойством: для каждой стороны $[a_i, a_j]$ $(i, j \in \{1, 2, 3\},\ i \neq j)$ найдется треугольник $\mathcal{T}_s$ $(1 \leq s \leq k)$, у которого одна из сторон совпадает с $[a_i, a_j]$. Пусть на каждом из треугольников $\mathcal{T}_i$ задается свой многочлен $P_{n,i} = P_i$ степени не выше n (степень берется по совокупности переменных т. е. суммы степеней у мономов не превосходят n). Таким образом, на T задана кусочно полиномиальная функция S_T.

На S_T будем налагать следующие требования:

C1. S_T интерполирует значения функции f и, возможно, ее производные по избранным направлениям в некоторых точках треугольника T, в том числе в вершинах и некоторых точках сторон, и полностью определяется интерполяционными условиями и условием принадлежности классу $C^r(T)$ $(r \geq 1)$, т. е. задается локально на T;

C2. совокупность всех S_T образует функцию из класса $C^r(\Omega)$ $(r \geq 1)$, т. е. если $\widetilde{S} = \sum\limits_{T \in \Delta} \widetilde{S}_T$, где

$$\widetilde{S}_T(u) = \begin{cases} S_T(u), & \text{если} \quad u \in T, \\ 0, & \text{если} \quad u \in \Omega \setminus T, \end{cases}$$

то $\widetilde{S} \in C^r(\Omega)$.

Договоримся писать, что для любых величин ψ_1 и ψ_2 (будь то функции некоторых переменных или константы) имеет место отношение $\psi_1 \overset{(\gtrsim)}{\lesssim} \psi_2$, если существует число $C > 0$, не зависящее от функции f и геометрических характеристик треугольника (допускается зависимость от k и n), такое что $\psi_1 \overset{(\geq)}{\leq} C\psi_2$.

Известно, что для простого (не составного) конечного элемента $T^* \subset \mathbb{R}^m$ (T^* – не обязательно треугольник или m-симплекс) при достаточно общих ограничениях на тело T^* и на условия интерполяции функции $f \in W^{n+1}M$ имеют место оценки сверху величины аппроксимации функции и ее производных (P.G.Ciarlet, P.A.Raviart, [1]), которые в случае треугольника принимают вид

$$||D^s f - D^s P_n||_{C(T^*)} \lesssim M H^{n+1-s} \left(\sin\alpha\right)^{-s}, \tag{1}$$

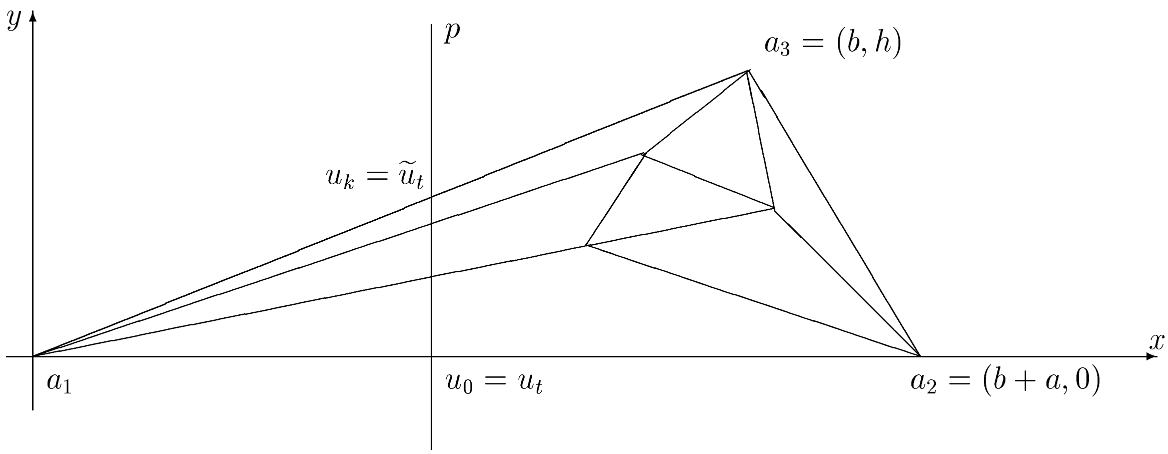
$$0 \leq s \leq n,$$

где P_n – интерполяционный многочлен типа Лагранжа, Эрмита или Биркгофа степени не выше n по совокупности переменных, α – наименьший угол треугольника (см. также [2], [3], [4]). Оценки типа (1) являются причиной введения ограничения на триангуляцию, т. е. наложения "условия наименьшего угла" — требования отделенности от нуля величин наименьших углов треугольников. Вместе с тем имеются успешные попытки ослабить отрицательное влияние наименьшего угла за счет выбора подходящих условий интерполяции (см. [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]). Однако, анализируя данные работы, можно заметить, что в оценках производных второго и более высоких порядков (если брать совокупность всех возможных направлений, по которым берутся производные) синус наименьшего угла в знаменателе отсутствует только в случаях, когда обеспечивается лишь непрерывность глобальной кусочно-полиномиальной функции на Ω, и не обеспечивается гладкость. Это наблюдение имеет обоснование: в [16] для простого (не составного) конечного элемента было показано, что для большого множества способов выбора локальных условий интерполяции, в том числе традиционных, при построении кусочно полиномиальной функции глобальной гладкости 1 или выше отрицательное влияние наименьшего угла треугольника на величину погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционного многочлена является существенным для производных порядка 2 и выше. В данной работе аналогичный результат доказывается для некоторого естественного подкласса описанных выше составных конечных элементов, которые обеспечивают гладкость сплайна $\widetilde{S}$ на Ω без знания информации о соседних конечных элементах.

2. Формулировка теоремы и основные обозначения

Пусть $T = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ – треугольный составной конечный элемент с триангуляцией на треугольники $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_k$; S_T – сплайн, удовлетворяющий условиям C1, C2. Обозначим через α, β, θ величины углов треугольника T при вершинах a_1, a_2, a_3 соответственно. Будем считать, что $0 < \alpha \leq \beta \leq \theta$. Прочие обозначения: H – диаметр треугольника T; ς_{ij} – единичные векторы, направленные от a_i к a_j; n_{ij} $(i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j)$ – единичные нормали к сторонам $[a_i, a_j]$; d_{ij} – длина стороны $[a_i, a_j]$; $D^s_{\xi_1 \ldots \xi_s}$ — производные порядка s по направлениям произвольных единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s$. Под нормой везде будем понимать норму в L_∞.

Поместим T в прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы вершины T имели следующие координаты: $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (b + a, 0)$, $a_3 = (b, h)$, где $a, b, h > 0$ и $a < b$, $h < b$ (последние два неравенства следуют из договоренности о соотношениях между величинами углов при вершинах a_1, a_2, a_3). Очевидно, $a + b = H$.



Составной элемент T

Пусть сужения сплайна $S_T(u)$ и его производной $\partial S_T(u)/\partial n_{ij}$ на любую сторону $[a_i, a_j]$ треугольника однозначно определяются интерполяционными условиями, задаваемыми в точках стороны $[a_i, a_j]$. Отметим, что в силу условий C1 и C2 тем же условиям должен удовлетворять сплайн $S_{T^*}(u)$ на соседнем с T треугольнике T^*. Пусть, кроме того, интерполяционные условия в точках сторон треугольника T задаются таким образом, что для любой стороны $[a_i, a_j]$ треугольника T имеет место равенство

$$\left.\frac{\partial^s \left(f(u) - S_T(u)\right)}{\partial n_{ij}^s}\right|_{u \in [a_i, a_j]} = \frac{1}{(n+1-s)!} \, \frac{\partial^{n+1} f(\vartheta_{ij}^s)}{\partial n_{ij}^s \partial \varsigma_{ij}^{n+1-s}} \, d_{ij}^{n+1-s} \omega_{ij,\; n+1-s}\left(t\right), \qquad (2)$$

$$s = 0, \ldots, r, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad i \neq j,$$

где $\vartheta_{ij}^s \in [a_i, a_j]$; $\omega_{ij,\; n+1-s}(t)$ — многочлен степени $n + 1 - s$ со старшим коэффициентом, равным единице; $t = |u - a_i| / d_{ij} \in [0, 1]$ (через $|u - a_i|$ обозначено расстояние между точками u и a_i).

Равенство (2) – это формула остаточного члена интерполяционной формулы для функции $\partial^s f / \partial n_{ij}^s$ и ее интерполяционного многочлена, задаваемого на отрезке $[a_i, a_j]$ и являющегося сужением сплайна S_T на данный отрезок. Поскольку для доказательства теоремы нам достаточно принадлежности функции $\widetilde{S}$ классу $C^1(\Omega)$, можно без ограничений общности считать, что $r = 1$.

Напомним, что в число условий построения сплайна S_T на треугольнике T входит требование обеспечения гладкости результирующего сплайна $\widetilde{S}$ на Ω при отсутствии информации о соседних с T конечных элементах. Обычно в этом случае на всех сторонах треугольника T задаются однотипные условия интерполяции, т. е.

$$\omega_{ij,n+1-s}(x) = \omega_{pq,n+1-s}(x)$$

для любых i, j, p, q и $s = 0, 1$ (или $s = 0, \ldots, r$, если $r > 1$). Это означает, что

$$\omega_{ij,n+1-s}(x) = (-1)^{n+1-s}\omega_{ij,n+1-s}(1-x).$$

Тогда

$$\omega^{(n-s)}_{ij,n+1-s}(x) = -\omega^{(n-s)}_{ij,n+1-s}(1-x). \tag{3}$$

Поскольку $\omega_{ij,\ n+1-s}$ — многочлен степени $n+1-s$ с старшим коэффициентом, равным единице, то $\omega^{(n-s)}_{ij,n+1-s}(x)$ является линейной функцией, и из (3) следует, что

$$\frac{\omega^{(n-s)}_{ij,n+1-s}(x)}{(n+1-s)!} = x - \frac{1}{2} \tag{4}$$

для любых $s = 0, 1$ и $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$.

Рассмотрим функцию

$$f^*(x, y) = \delta_1 M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \delta_2 M \frac{x^n y}{n!}, \tag{5}$$

где δ_1 и δ_2 выбираются таким образом, чтобы $f^* \in W^{n+1}M$, $\delta_1^2 + \delta_2^2 \neq 0$ (аналогичная функция была использована в [8] при $n = 5$ для доказательства неулучшаемости полученных там оценок погрешности аппроксимации производных). Положим

$$e(x, y) = f^*(x, y) - S_T(x, y),$$

$$e_i(x, y) = (f^*(x, y) - S_T(x, y))\Big|_{\mathcal{T}_i} = f^*(x, y) - P_{n,i}(x, y).$$

Теорема. *Если S_T удовлетворяет условиям $C1$, $C2$ и выполнены соотношения (2) и (4), то для любого $s = 2, \ldots, n$ найдется $\alpha_0 > 0$ и единичные векторы $\xi_1, \ldots, \xi_s$, такие что для любого $\alpha < \alpha_0$ имеют место оценки*

$$\left\| D^s_{\xi_1 \ldots \xi_s}(f^* - S_T) \right\| \gtrsim \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\alpha}\ . \tag{6}$$

3. Доказательство теоремы

Вспомним, что число треугольников $\mathcal{T}_i$, на которые разбивается T, конечно и равно k. Пусть $\mathcal{T}_i = \langle a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)} \rangle$ $(i = 1, \ldots, k)$. Тогда существует непустое пересечение "вертикальной" полосы ширины $\widetilde{H} \gtrsim H$ и треугольника T, такое что любая прямая, лежащая в данной полосе (и, следовательно, параллельная оси y), пересекается только с такими сторонами $[a_r^{(i)}, a_s^{(i)}]$ $(1 \le s, r \le 3,\ s \ne r)$ треугольников $\mathcal{T}_i$ из множества $\{\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_k\}$, для которых имеет место неравенство $\left|a_s^{(i)} - a_r^{(i)}\right| \gtrsim H$. Точнее, на сторонах $[a_1, a_2]$ и $[a_1, a_3]$ составного элемента T можно выделить отрезки $Q \subset [a_1, a_2]$ и $\widetilde{Q} \subset [a_1, a_3]$ со следующими свойствами:

1°. $|Q| = c(k)H$, где $|Q|$ – длина отрезка Q, $c(k)$ – положительное число, зависящее только от k (т. е. $|Q| \gtrsim H$);

2°. пусть прямые p_1 и p_2 параллельны оси y и проходят через две различные точки $q_1, q_2 \in Q$. Пусть p_1 пересекает сторону $[a_r^{(i)}, a_s^{(i)}]$ некоторого треугольника $\mathcal{T}_i$ в некоторой точке u_1. Тогда p_2 также пересекает $[a_r^{(i)}, a_s^{(i)}]$ в некоторой точке u_2;

3°. любая прямая p, параллельная оси y и проходящая через любую точку $u \in Q$, пересекает отрезок $\widetilde{Q}$ в некоторой точке $\widetilde{u}$ (очевидно, $\left|\widetilde{Q}\right| \gtrsim H$).

Отрезки Q и $\widetilde{Q}$ могут быть представлены следующим образом:

$$Q = \{u = a_1 + t\,(a_2 - a_1): \quad t \in \sigma \subseteq [0,1]\},$$

$$\widetilde{Q} = \left\{\widetilde{u} = a_1 + \widetilde{t}\,(a_3 - a_1): \quad \widetilde{t} \in \widetilde{\sigma} \subseteq [0,1]\right\},$$

где $|\sigma| \gtrsim 1$, $|\widetilde{\sigma}| \gtrsim 1$.

Нам будет достаточно рассмотреть одну прямую из указанной полосы. Возьмем некоторое значение $t \in \sigma$ и соответствующую точку $u_t = a_1 + t\,(a_2 - a_1)$. Проведем через точку u_t прямую p, параллельную оси y. Эта прямая пересекает отрезок $\widetilde{Q}$ в некоторой точке $\widetilde{u}_t = a_1 + \widetilde{t}\,(a_3 - a_1)$ при соответствующем $\widetilde{t}$. Таким образом, мы получаем функцию $\psi : \sigma \to \widetilde{\sigma}$ такую, что $\widetilde{t} = \psi(t)$, и точки u_t и $\widetilde{u}_t$.

Рассмотрим все треугольники составного конечного элемента T, имеющие общие точки с прямой p (без ограничений общности можем считать, что p имеет пустое пересечение с множеством всех вершин треугольников, составляющих триангуляцию элемента T; также можем считать, что число треугольников равно k), и занумеруем их следующим образом: $\mathcal{T}_1$ – треугольник, у которого одна из сторон, пересекаемая прямой p, совпадает с $[a_1, a_2]$; $\mathcal{T}_2$ – треугольник, соседний с $\mathcal{T}_1$; ..., $\mathcal{T}_k$ – треугольник, соседний с $\mathcal{T}_{k-1}$.

Обозначим стороны этих треугольников: $[c_1^0, c_2^0]$ – сторона треугольника $\mathcal{T}_1$, совпадающая с $[a_1, a_2]$; $[c_1^1, c_2^1]$ – общая сторона треугольников $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$; $\ldots$; $[c_1^{k-1}, c_2^{k-1}]$ – общая сторона треугольников $\mathcal{T}_{k-1}$ и $\mathcal{T}_k$; $[c_1^k, c_2^k]$ – сторона треугольника $\mathcal{T}_k$, совпадающая с $[a_1, a_3]$. В силу условий 1° – 3° можем утверждать, что для любого $j = 1, \ldots, k$ имеет место неравенство

$$\left|c_2^j - c_1^j\right| \gtrsim H. \tag{7}$$

Пусть далее u_j – точки пересечения прямой p и отрезков $[c_1^j, c_2^j]$ $(j = 0, \ldots, k)$. В частности, $u_0 = u_t$, $u_k = \widetilde{u}_t$.

Пусть точки c_i^j имеют координаты (x_i^j, y_i^j), и для всех j выполняются неравенства $x_1^j < x_2^j$. Обозначим через τ_j единичные векторы, направленные от c_1^j к c_2^j. Очевидно, что $c_1^{j-1} = c_1^j$ или $c_2^{j-1} = c_2^j$ (в дальнейшем это не будет иметь значения), $\tau_0 = \varsigma_{12}$, $\tau_k = \varsigma_{13}$.

Через α_j $(j = 1, \ldots, k)$ обозначим углы между векторами τ_{j-1} и τ_j с учетом направления этих векторов: если в результате приведения к общему началу кратчайший поворот от вектора τ_{j-1} к вектору τ_j происходит против часовой стрелки, то $\alpha_j > 0$, иначе $\alpha_j < 0$. Отметим, что

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = \alpha. \tag{8}$$

Рассмотрим функции $\omega_{ij,n+1-k}$ из (2).

Лемма 1. *Пусть $\widetilde{t} = \psi(t)$ и выполнено условие $a < b/(2n)$. Положим*

$$W_2(t) = \frac{(n+1)d_{13}\ \omega_{13,n+1}^{(n)}\left(\ \widetilde{t}\ \right)\cos\alpha}{(n+1)!} - \frac{nd_{12}\ \omega_{12,n}^{(n-1)}(t)}{n!} - \frac{|u_k - u_0|}{\operatorname{tg}\alpha}\ .$$

Тогда имеет место неравенство

$$|W_2(t)| \gtrsim H. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как прямая p, проходящая через точки u_0 и u_k, параллельна оси y, $|u_k - a_1| = d_{13}\widetilde{t}$ и $|u_0 - a_1| = d_{12}t$, то

$$d_{13}\widetilde{t}\cos\alpha = d_{12}t,$$

откуда следует, что

$$\widetilde{t} = \frac{d_{12}}{d_{13}}\ \frac{t}{\cos\alpha} = \frac{b+a}{(b^2+h^2)^{1/2}}\ \frac{(b^2+h^2)^{1/2}}{b}\ t = \frac{b+a}{b}\ t.$$

Заметим, что

$$\frac{|u_k-u_0|}{\operatorname{tg}\alpha} = |u_0-a_1| = (b+a)t.$$

Тогда с учетом формулы (4) и того, что $d_{12}=b+a$, $d_{13}\cos\alpha = (b^2+h^2)^{1/2}\cos\alpha = b$, получаем:

$$W_2(t) = (n+1)b\left(\widetilde{t}-\frac{1}{2}\right) - n(b+a)\left(t-\frac{1}{2}\right) - (b+a)t$$

$$= (n+1)b\left(\frac{b+a}{b}\ t-\frac{1}{2}\right) - n(b+a)\left(t-\frac{1}{2}\right) - (b+a)t = -\frac{b}{2}+\frac{na}{2}.$$

Таким образом,

$$|W_2(t)| \geq \frac{b}{2} - \frac{nb}{4n} \geq \frac{b}{4} \gtrsim H.$$

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $\widetilde{t} = \psi(t)$ *и выполнено условие* $a \geq b/(2n)$. *Положим*

$$W_1(t) = \frac{d_{13}\ \omega^{(n)}_{13,n+1}\left(\ \widetilde{t}\ \right)\cos\alpha}{(n+1)!} - \frac{d_{12}\ \omega^{(n)}_{12,n+1}\left(\ t\ \right)}{(n+1)!}$$

Тогда имеет место неравенство

$$|W_1(t)| \gtrsim H. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы 1:

$$W_1(t) = b\left(\widetilde{t}-\frac{1}{2}\right) - (b+a)\left(t-\frac{1}{2}\right) = b\left(\frac{b+a}{b}\ t-\frac{1}{2}\right) - (b+a)\left(t-\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2}\ ,$$

откуда следует оценка $|W_1(t)| \geq b/(4n) \gtrsim H$. □

Лемма 3. *Пусть* $\tau = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. *Тогда для любой функции* g *имеет место равенство*

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial \tau}\ \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{\partial g}{\partial y}\operatorname{tg}\varphi. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из того, что $\partial g/\partial\tau = (\partial g/\partial x)\cos\varphi + (\partial g/\partial x)\sin\varphi$. □

Введем еще одно обозначение:

$$\gamma_j = \sum_{s=1}^{j} \alpha_s, \tag{12}$$

где $j = 1, \dots, k$. Положим $\gamma_0 = 0$.

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\sum_{s=0}^{k-1} \frac{\sin \alpha_{k-s}}{\cos \gamma_{k-s} \cos \gamma_{k-s-1}} = \operatorname{tg} \alpha. \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сумму последних двух слагаемых:

$$\frac{\sin \alpha_2}{\cos \gamma_2 \cos \gamma_1} + \frac{\sin \alpha_1}{\cos \gamma_1} = \frac{\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_1}$$

$$= \frac{\sin \alpha_2 + \left(-\sin \alpha_2 + \sin(2\alpha_1 + \alpha_2)\right)/2}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_2 + \sin(2\alpha_1 + \alpha_2)}{2\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_1}$$

$$= \frac{2\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_1}{2\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos \alpha_1} = \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}\ . \tag{14}$$

Тогда, полагая $\alpha^* = \alpha_1 + \alpha_2$ и используя (14), можем сумму последних трех слагаемых представить в виде

$$\frac{\sin \alpha_3}{\cos \gamma_3 \cos \gamma_2} + \frac{\sin \alpha_2}{\cos \gamma_2 \cos \gamma_1} + \frac{\sin \alpha_1}{\cos \gamma_1} = \frac{\sin \alpha_3}{\cos \gamma_3 \cos \gamma_2} + \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$= \frac{\sin \alpha_3}{\cos(\alpha^* + \alpha_3) \cos \alpha^*} + \frac{\sin \alpha^*}{\cos \alpha^*} = \frac{\sin(\alpha^* + \alpha_3)}{\cos(\alpha^* + \alpha_3)} = \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}\ .$$

Действуя далее по индукции, получаем (13). □

Лемма 5. *Для любой функции g, определенной на треугольнике T, чисел $i = 1, \dots, k$ и $s = n-1, n$ имеет место представление*

$$\frac{\partial^s g}{\partial \tau_i^s} = \frac{\partial^s g}{\partial \tau_{i-1}^s}\ \frac{\cos^s \gamma_i}{\cos^s \gamma_{i-1}} + \frac{\partial^s g}{\partial \tau_{i-1}^{s-1} \partial y}\ \frac{s \cos^{s-1} \gamma_i \sin \alpha_i}{\cos^s \gamma_{i-1}} + \sum_{j=2}^{s} C_{i,j} \frac{\partial^s g}{\partial \tau_{i-1}^{s-j} \partial y^j}\ \sin^j \alpha_i, \tag{15}$$

где $|C_{i,j}| \lesssim 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\tau_i = (\cos \gamma_i, \sin \gamma_i)$ (см. (12)), то, принимая во внимание (11), получаем:

$$\frac{\partial^s g}{\partial \tau_i^s} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \gamma_i + \frac{\partial}{\partial y} \sin \gamma_i \right)^s g$$

$$= \left(\left(\frac{\partial}{\partial \tau_{i-1}} \ \frac{1}{\cos\gamma_{i-1}} - \frac{\partial}{\partial y} \ \frac{\sin\gamma_{i-1}}{\cos\gamma_{i-1}} \right) \cos\gamma_i + \frac{\partial}{\partial y} \sin\gamma_i \right)^s g$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial \tau_{i-1}} \ \frac{\cos\gamma_i}{\cos\gamma_{i-1}} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sin\gamma_i - \frac{\cos\gamma_i}{\cos\gamma_{i-1}} \ \sin\gamma_{i-1} \right) \right)^s g.$$

Поскольку

$$\sin\gamma_i - \frac{\cos\gamma_i}{\cos\gamma_{i-1}} \ \sin\gamma_{i-1} = \sin(\gamma_{i-1}+\alpha_i) - \frac{\cos(\gamma_{i-1}+\alpha_i)}{\cos\gamma_{i-1}} \ \sin\gamma_{i-1}$$
$$= \sin\gamma_{i-1}\cos\alpha_i + \cos\gamma_{i-1}\sin\alpha_i - \frac{\cos\gamma_{i-1}\cos\alpha_i}{\cos\gamma_{i-1}} \ \sin\gamma_{i-1} + \frac{\sin\gamma_{i-1}\sin\alpha_i}{\cos\gamma_{i-1}} \ \sin\gamma_{i-1}$$
$$= \cos\gamma_{i-1}\sin\alpha_i + \operatorname{tg}\gamma_{i-1}\sin\gamma_{i-1}\sin\alpha_i = \sin\alpha_i \left(\cos\gamma_{i-1} + \frac{\sin^2\gamma_{i-1}}{\cos\gamma_{i-1}} \right) = \frac{\sin\alpha_i}{\cos\gamma_{i-1}} \ ,$$

то

$$\frac{\partial^s g}{\partial \tau_i^s} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau_{i-1}} \frac{\cos\gamma_i}{\cos\gamma_{i-1}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin\alpha_i}{\cos\gamma_{i-1}} \right)^s g.$$

Раскрывая скобки, получим (15). □

Пусть h_i – высота треугольника $\mathcal{T}_i$, опущенная на сторону $[c_1^s, c_2^s]$ ($s = i-1$ или $s = i$). Так как $\mu(\mathcal{T}_i) < \mu(T)$ (где под μ подразумеваем площадь соответствующего треугольника) и $|c_2^s - c_1^s| \gtrsim H$, можем утверждать, что $h_i \lesssim h$. В частности, это означает, что

$$|\sin\alpha_i| \lesssim \sin\alpha, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{16}$$

Лемма 6. *Имеет место разложение*

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} = \frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial x^n} \ \cos^n\alpha + \frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial x^{n-1}\partial y} \ n\cos^n\alpha \operatorname{tg}\alpha$$
$$+ \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=2}^{n} D_{r,j} \frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \ \sin^{j-1}\alpha_r \sin\alpha + \delta_2 M \, |u_k - u_0| \cos^n\alpha, \tag{17}$$

где величины $D_{r,j}$ *удовлетворяют неравенству* $|D_{r,j}| \lesssim 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $g = e_k$, $i = k$, $s = n$ в (15), получим равенство

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} = \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_{k-1}^n} \ \frac{\cos^n\gamma_k}{\cos^n\gamma_{k-1}} + n \ \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_{k-1}^{n-1}\partial y} \ \frac{\cos^{n-1}\gamma_k\sin\alpha_k}{\cos^n\gamma_{k-1}} + \sum_{j=2}^{n} D_{k,j} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_{k-1}^{n-j}\partial y^j} \ \sin^j\alpha_k.$$

Разложим $\partial^n e_k(u_k)/\partial \tau_k^n$ и $\partial^n e_k(u_k)/\left(\partial \tau_{k-1}^{n-1}\partial y\right)$ по формуле конечных приращений Лагранжа в точке u_{k-1} (напомним, что прямая p, проходящая через точки u_k и u_{k-1}, параллельна оси y). Тогда

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} = \frac{\partial^n e_k(u_{k-1})}{\partial \tau_{k-1}^n} \ \frac{\cos^n\gamma_k}{\cos^n\gamma_{k-1}} + n \ \frac{\partial^n e_k(u_{k-1})}{\partial \tau_{k-1}^{n-1}\partial y} \ \frac{\cos^{n-1}\gamma_k\sin\alpha_k}{\cos^n\gamma_{k-1}}$$

$$+\sum_{j=2}^{n} D_{k,j} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_{k-1}^{n-j} \partial y^j} \ \sin^j \alpha_k + \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{k-1}^n \partial y} \left|u_k - u_{k-1}\right| \ \frac{\cos^n \gamma_k}{\cos^n \gamma_{k-1}}$$

$$+ n \frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{k-1}^{n-1} \partial y^2} \left|u_k - u_{k-1}\right| \ \frac{\cos^{n-1} \gamma_k \sin \alpha_k}{\cos^n \gamma_{k-1}} \ .$$

Так как f^* имеет вид (5), последнее слагаемое равно нулю. Кроме того, поскольку $\tau_{k-1} = (\cos \gamma_{k-1}, \sin \gamma_{k-1})$, из (5) следует равенство

$$\frac{\partial^{n+1} f^*}{\partial \tau_{k-1}^n \partial y} = \delta_2 M \cos^n \gamma_{k-1}.$$

Учитывая гладкость функции $e(x, y)$ на треугольнике T, получаем:

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} = \frac{\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})}{\partial \tau_{k-1}^n} \ \frac{\cos^n \gamma_k}{\cos^n \gamma_{k-1}} + n \ \frac{\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})}{\partial \tau_{k-1}^{n-1} \partial y} \ \frac{\cos^{n-1} \gamma_k \sin \alpha_k}{\cos^n \gamma_{k-1}}$$

$$+ \sum_{j=2}^{n} D_{k,j} \frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_{k-1}^{n-j} \partial y^j} \ \sin^j \alpha_k + \delta_2 M \left|u_k - u_{k-1}\right| \cos^n \gamma_k.$$

Применим (15) к случаям $g = e_{k-1}$, $i = k-1$, $s = n$ и $g = \partial e_k / \partial y$, $i = k-1$, $s = n-1$, принимая во внимание (16):

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} = \frac{\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})}{\partial \tau_{k-2}^n} \ \frac{\cos^n \gamma_k}{\cos^n \gamma_{k-2}}$$

$$+ \frac{\partial^n e_{k-1}(u_{k-1})}{\partial \tau_{k-2}^{n-1} \partial y} \ \frac{n \cos^n \gamma_k}{\cos^{n-1} \gamma_{k-2}} \left(\frac{\sin \alpha_{k-1}}{\cos \gamma_{k-1} \cos \gamma_{k-2}} + \frac{\sin \alpha_k}{\cos \gamma_k \cos \gamma_{k-1}} \right)$$

$$+ \sum_{r=k-1}^{k} \sum_{j=2}^{n} D_{r,j} \frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \ \sin^{j-1} \alpha_r \sin \alpha + \delta_2 M \left|u_k - u_{k-1}\right| \cos^n \gamma_k.$$

Как и ранее, разложим $\partial^n e_{k-1}(u_{k-1}) / \partial \tau_{k-2}^n$ и $\partial^n e_{k-1}(u_{k-1}) / \left(\partial \tau_{k-2}^{n-1} \partial y\right)$ по формуле конечных приращений Лагранжа в точке u_{k-2} и используем гладкость функции $e(x, y)$, а также то, что $\partial^{n+1} f^* / \left(\partial \tau_{k-2}^n \partial y\right) = \delta_2 M \cos^n \gamma_{k-2}$. Получаем:

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial \tau_k^n} = \frac{\partial^n e_{k-2}(u_{k-2})}{\partial \tau_{k-2}^n} \ \frac{\cos^n \gamma_k}{\cos^n \gamma_{k-2}}$$

$$+ \frac{\partial^n e_{k-2}(u_{k-2})}{\partial \tau_{k-2}^{n-1} \partial y} \ \frac{n \cos^n \gamma_k}{\cos^{n-1} \gamma_{k-2}} \left(\frac{\sin \alpha_{k-1}}{\cos \gamma_{k-1} \cos \gamma_{k-2}} + \frac{\sin \alpha_k}{\cos \gamma_k \cos \gamma_{k-1}} \right)$$

$$+ \sum_{r=k-1}^{k} \sum_{j=2}^{n} D_{r,j} \frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \ \sin^{j-1} \alpha_r \sin \alpha + \delta_2 M \left(\left|u_k - u_{k-1}\right| + \left|u_{k-1} - u_{k-2}\right|\right) \cos^n \gamma_k.$$

Продолжая этот процесс, приходим к равенству

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_k^n}=\frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial\tau_0^n}\,\frac{\cos^n\gamma_k}{\cos^n\gamma_0}+\frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial\tau_0^{n-1}\partial y}\,\frac{n\cos^n\gamma_k}{\cos^{n-1}\gamma_0}\sum_{s=0}^{k-1}\frac{\sin\alpha_{k-s}}{\cos\gamma_{k-s}\cos\gamma_{k-s-1}}$$

$$+\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=2}^{n}D_{r,j}\frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial\tau_{r-1}^{n-j}\partial y^j}\,\sin^{j-1}\alpha_r\sin\alpha+\delta_2 M\cos^n\gamma_k\sum_{i=1}^{k}|u_i-u_{i-1}|\,.$$

Учитывая (13) и то, что $\sum_{i=1}^k|u_i-u_{i-1}|=|u_k-u_0|$, $\partial/\partial\tau_0=\partial/\partial x$, $\gamma_k=\alpha$, $\gamma_0=0$, приходим к (17). Лемма 6 доказана. □

Лемма 7. *Найдутся* $r\in\{1,\dots,k\}$ *и* $j\in\{2,\dots,n\}$, *такие что*

$$\left|\frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial\tau_{r-1}^{n-j}\partial y^j}\right|\gtrsim\frac{MH}{\left|\sin^{j-1}\alpha_r\right|}\ . \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Принимая во внимание (2), вид функции f^* и то, что $\tau_k=\varsigma_{13}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, получим равенства

$$\frac{\partial^n e_k(u_k)}{\partial\tau_k^n}=\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+1}f^*}{\partial\tau_k^{n+1}}\,d_{13}\omega_{13,n+1}^{(n)}\left(\widetilde{t}\,\right)$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(\delta_1 M\cos^{n+1}\alpha+\delta_2(n+1)M\cos^n\alpha\sin\alpha\right)d_{13}\omega_{13,n+1}^{(n)}\left(\widetilde{t}\,\right);$$

$$\frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial x^n}\;=\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+1}f^*}{\partial x^{n+1}}\,d_{12}\omega_{12,n+1}^{(n)}(t)=\frac{1}{(n+1)!}\,\delta_1 M d_{12}\omega_{12,n+1}(t);$$

$$\frac{\partial^n e_1(u_0)}{\partial x^{n-1}\partial y}\;=\frac{1}{n!}\,\frac{\partial^{n+1}f^*}{\partial x^n\partial y}d_{12}\omega_{12,n}^{(n-1)}=\;\frac{1}{n!}\,\delta_2 M d_{12}\omega_{12,n}^{(n-1)}.$$

Тогда (17) можно преобразовать к виду

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=2}^{n}D_{r,j}\frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial\tau_{r-1}^{n-j}\partial y^j}\,\sin^{j-1}\alpha_r\sin\alpha$$

$$=\delta_1 M\cos^n\alpha\left(\frac{d_{13}\ \omega_{13,n+1}^{(n)}\left(\,\widetilde{t}\,\right)\cos\alpha}{(n+1)!}-\frac{d_{12}\ \omega_{12,n+1}^{(n)}\left(\,t\,\right)}{(n+1)!}\right)$$

$$+\delta_2 M\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha\left(\frac{(n+1)d_{13}\ \omega_{13,n+1}^{(n)}\left(\,\widetilde{t}\,\right)\cos\alpha}{(n+1)!}-\frac{nd_{12}\ \omega_{12,n}^{(n-1)}(t)}{n!}-\frac{|u_k-u_0|}{\operatorname{tg}\alpha}\right)$$

$$=\delta_1 MW_1(t)\cos^n\alpha+\delta_2 MW_2(t)\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha, \tag{19}$$

где $W_1(t)$ и $W_2(t)$ определены в леммах 1 и 2.

Выбирая величины δ_1 и δ_2 таким образом, чтобы оба слагаемых в правой части равенства (19) имели одинаковые знаки, и применяя (9) и (10) получим:

$$\left| \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=2}^{n} D_{r,j} \frac{\partial^n e_r(u_r)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \ \sin^{j-1} \alpha_r \sin \alpha \right| \gtrsim H \sin \alpha,$$

откуда следует (18). Лемма 7 доказана. □

Завершим доказательство теоремы. Пусть r и j таковы, что выполняется (18). Рассмотрим треугольник $\mathcal{T}_r$. Пусть q_0 – центр масс треугольника $\mathcal{T}_r$. Так как $j \geq 2$, и f^* имеет вид (5), то величина в левой части (18) является постоянной на $\mathcal{T}_r$, и тогда

$$\left| \frac{\partial^n e_r(q_0)}{\partial \tau_{r-1}^{n-j} \partial y^j} \right| \gtrsim \frac{MH}{\left|\sin^{j-1} \alpha_r\right|} \ .$$

Отметим также, что функция $e_r = (f^* - S_T)\Big|_{\mathcal{T}_r}$, рассматриваемая на $\mathcal{T}_r$, является многочленом.

Пусть прямая p_1 параллельна вектору τ_{r-1} и проходит через точку q_0. Рассмотрим отрезок $Q_1 = p_1 \cap \mathcal{T}_r$. Так как p_1 параллельна стороне $[c_1^{r-1}, c_2^{r-1}]$ треугольника $\mathcal{T}_r$, проходит через центр масс этого треугольника, и имеет место (7), выполняется неравенство $|Q_1| \gtrsim H$. Применяя $(n-j)$ раз неравенство Маркова [17, §3.5], на отрезке Q_1, приходим к существованию точек $q_j, q_{j+1}, \ldots, q_{n-1} \in Q_1$ для которых имеют место неравенства

$$\left| \frac{\partial^{n-s} e_r(q_{n-s})}{\partial \tau_{r-1}^{n-j-s} \partial y^j} \right| \gtrsim \frac{MH^{s+1}}{\left|\sin^{j-1} \alpha_r\right|} \ . \tag{20}$$

$$s = 1, \ldots, n-j.$$

Рассмотрим (20) при $s = n-j$. Пусть прямая p_2 проходит через точку q_j параллельно оси y. Введем в рассмотрение отрезок $Q_2 = p_2 \cap \mathcal{T}_r$. Учитывая расположение точки q_j ($q_j \in Q_1$, где Q_1 – отрезок, проходящий через центр тяжести треугольника $\mathcal{T}_r$ параллельно стороне $[c_1^{r-1}, c_2^{r-1}]$, для которой имеет место (7)), можем утверждать, что

$$|Q_2| \gtrsim h_r,$$

где h_r – наименьшая из высот треугольника $\mathcal{T}_r$ (принимая во внимание определение знака "$\gtrsim$" и (7), можно считать, что h_r – высота, опущенная на $[c_1^{r-1}, c_2^{r-1}]$). Применяя

$(j-2)$ раз неравенство Маркова на отрезке Q_2, приходим к существованию точек $q_2, q_3, \ldots, q_{j-1} \in Q_2$ для которых имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial^s e_r(q_s)}{\partial y^s}\right| \gtrsim \frac{MH^{n+1-s}}{|\sin^{s-1}\alpha_r|}\ , \tag{21}$$

$$s = 2, \ldots, j.$$

Объединяя (20), (21) и (16), получаем (6). Теорема доказана. □

Замечание. Условие (4) в формулировке теоремы можно заменить на более наглядное условие (3) или более общие условия (9) и (10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выше было показано, что (4) является следствием (3). С другой стороны, условие (4) использовалось только для доказательства (9) и (10). □

1. **Ciarlet P.G., Raviart P.A.** General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. Vol 46, № 3. P. 177–199.

2. **Ženišek A.** Interpolation polynomials on the triangle // Numer. Math. 1970. Vol 15. P. 283–296.

3. **Bramble J.H., Zlamal M.** Triangular elements in the finite element method // Math. Comp. 1970. Vol 24, № 112. P. 809–820.

4. **Zlamal M., Ženišek A.** Mathematical aspect of the finite element method // Technical, physical and mathematical principles of the finite element method (V.Kolar et al., eds.). Praha: Acad. VED. 1971. P. 15–39.

5. **Synge J.L.** The hypercircle in mathematical physics. Cambridge University Press. 1957.

6. **Babuška I., Aziz A.K.** On the angle condition in the finite element method // SIAM J. Numer. Anal. 1976. Vol 13, № 2. P. 214–226.

7. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Труды МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 117–137.

8. **Субботин Ю.Н.** Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника // Труды Института математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 2. С. 110–119.

9. **Latypova N.V.** Error estimates for approximation by polynomials of degree $4k+3$ on the triangle // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 1. 2002. P. S190–S213.

10. **Baidakova N.V.** On some interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle // Russian Journal of numerical analysis and mathematical modelling. 1999. Vol 14, № 2. P. 87–107.

11. **Subbotin Yu.N.** A New Cubic Element in the FEM // Proceeding of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 2. 2005. P. S176–S187.

12. **Baidakova N.V.** A Method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 2. 2005. P. S49–S55.

13. **Ženišek A.** Maximum-angle condition and triangular finite elements of Hermite type // Math. Comp. 1995. V.64, № 211. P. 929–941.

14. **Латыпова Н.В.** Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. 2003. С. 3–10.

15. **Матвеева Ю.В.** Об эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике с использованием смешанных производных // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. 2007. Т.7, вып.1. С. 23-27.

16. **Байдакова Н. В.** Влияние гладкости на погрешность аппроксимации производных при локальной интерполяции на триангуляциях // Тр. Ин-та математики и механики. 2011. Т. 17, № 3. С. 83–97.

17. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука. 1987.