Алгебра и логика, 52, № 6 (2013), 657—666

УДК 512.565

КОНЕЧНОПОРОЖДЁННЫЕ РЕШЁТКИ С ВПОЛНЕ МОДУЛЯРНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ СРЕДИ ПОРОЖДАЮЩИХ*)

А. Г. ГЕЙН, М. П. ШУШПАНОВ

Исследование строения решётки нередко основывается на выделении в ней элементов, обладающих теми или иными хорошими свойствами — быть атомом, быть дистрибутивным, стандартным или нейтральным элементом и т. п. Отметим, что определения дистрибутивного и стандартного элементов получены по одной схеме: в равенстве, выражающем закон дистрибутивности, квантор всеобщности применяется только к двум элементам из трёх, и оставшийся свободным третий элемент, для которого сконструированное так высказывание истинно, и получает соответствующее название [1, с. 76]. Если же в равенстве дистрибутивности квантор всеобщности применять только к одному элементу, то получается, напр., определение дистрибутивной пары элементов [2].

Аналогичный подход можно использовать для квазитождества модулярности. В частности, Л. Уилкокс [3] предложил следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пара $(a,\, b)$ элементов решётки $\langle L; \wedge, \vee\rangle$ называется *модулярной*, если

$$\forall x \in L : x \leq b \to (a \vee x) \wedge b = (a \wedge b) \vee x.$$

*)Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках проекта повышения конкурентоспособности (Соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006).

Если же в указанной выше формуле квантор всеобщности применять не к одному, а к двум элементам, то возникают понятия левомодулярного и правомодулярного элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть L — произвольная решётка.

(i) Элемент a называется *левомодулярным*, если

$$\forall x, b \in L : x \leq b \to (a \vee x) \wedge b = (a \wedge b) \vee x.$$

(ii) Элемент b называется *правомодулярным*, если

$$\forall a, x \in L : x \leq b \to (a \vee x) \wedge b = (a \wedge b) \vee x.$$

Определить эти элементы можно по-другому [1, с. 39, 75], тогда, в частности, становится понятным происхождение названий.*)

(i) Элемент a называется *левомодулярным*, если для любого элемента b пара $(a,\, b)$ модулярна.

(ii) Элемент b называется *правомодулярным*, если для любого элемента a пара $(a,\, b)$ модулярна.

Эквивалентность определений очевидна.

Нетрудно понять, что свойство „быть левомодулярным элементом“ самодвойственно, что однако неверно для свойства „быть правомодулярным элементом“.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Элемент решётки называется *коправомодулярным*, если в двойственной решётке он является правомодулярным.

Указанные свойства являются ослаблениями свойств дистрибутивности элемента решётки, кодистрибутивности, стандартности и костандартности. Действительно, легко проверить, что любой костандартный элемент

*) Отметим имеющиеся здесь довольно значительные терминологические расхождения. В ряде работ, напр., [4], правомодулярные элементы называются модулярными. В отечественной литературе модулярными нередко называют левомодулярные элементы, а правомодулярные — верхнемодулярными [5, 6]. В исследованиях, посвящённых решёткам подгрупп и подколец, модулярными называются элементы, которые одновременно коправомодулярны и левомодулярны [7, 8], и т. д. Мы в данной работе будем придерживаться терминологии, принятой в [1].

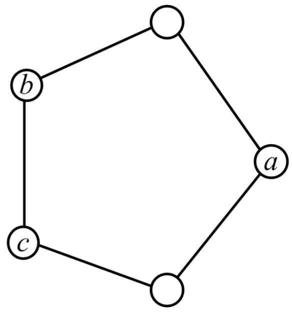

Рис. 1

является левомодулярным. В силу самодвойственности свойства левомодулярности стандартный элемент решётки также является левомодулярным. В свою очередь, всякий кодистрибутивный элемент является правомодулярным, а дистрибутивный — коправомодулярным.

В [9] Г. Биркгоф ввёл понятие нейтрального элемента. Можно сказать, что нейтральный элемент — это элемент, обладающий сразу всеми четырьмя свойствами — дистрибутивностью, кодистрибутивностью, стандартностью и костандартностью. Реально хватает двух свойств, напр., стандартности и кодистрибутивности (если проецировать эти свойства на модулярность, то это одновременно левая и правая модулярности). Но в случае модулярности все три свойства не только попарно различны, но и даже наличие у элемента любых двух из них ещё не влечёт обладания третьим. Простейший подтверждающий пример — хорошо известный пентагон (см. рис. 1): элемент a в нём правомодулярен и коправомодулярен, но не левомодулярен; b левомодулярен и коправомодулярен, но не правомодулярен; c левомодулярен и правомодулярен, но не коправомодулярен. Поэтому естественно интересоваться элементами, которые обладают всеми тремя свойствами одновременно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Элемент решётки называется *вполне модулярным*, если он правомодулярен, левомодулярен и коправомодулярен одновременно.

Основное свойство нейтрального элемента таково: элемент нейтрален тогда и только тогда, когда с любыми двумя другими элементами решётки

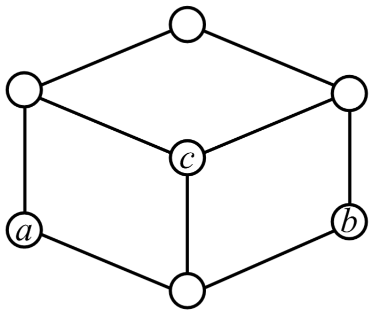

Рис. 2

он порождает дистрибутивную подрешётку.

Получить точный аналог этого утверждения для вполне модулярного элемента нельзя: немодулярная решётка, изображённая на рис. 2, порождена элементами a, b и c, причём элемент c вполне модулярен. Отметим, что в данном случае элементы a и b правомодулярны, поскольку в любой решётке каждый атом автоматически является правомодулярным. Значит, решётка, порождённая тремя правомодулярными элементами, не обязана быть модулярной. Переход к решётке, двойственной к указанной, показывает, что решётка, порождённая тремя коправомодулярными элементами, также не обязана быть модулярной. В то же время, решётка, порождённая тремя левомодулярными элементами, всегда модулярна [10].

Тем не менее, справедлива теорема, которая может рассматриваться как ограниченный перенос свойств нейтральных элементов на вполне модулярные.

ТЕОРЕМА 1. *Решётка, порождённая тремя элементами, два из которых вполне модулярны, является модулярной.*

Возникает вопрос, является ли решётка, порождённая четырьмя или большим числом вполне модулярных элементов, модулярной. Ответ на него даёт

ТЕОРЕМА 2. *Для любого натурального $n > 3$ существует немодулярная решётка L, порождённая n атомами, каждый из которых вполне модулярен в L.*

Эти результаты были анонсированы в [11].

Для краткости введём некоторые обозначения. Пусть $p(x, y, z)$ — решёточный многочлен от переменных x, y, z, т. е. элемент свободной решётки, порождённой элементами x, y, z. Через $p^{\#}(x, y, z)$ обозначим многочлен, полученный из $p(x, y, z)$ заменой операции $\vee$ на операцию $\wedge$ и, наоборот, операции $\wedge$ — на операцию $\vee$. Обозначим через $t(x, y, z)$ многочлен $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$, а через $s(x, y, z)$ многочлен $t^{\#}(x, y, z)$. Ясно, что $t(x, y, z)$ является одним и тем же элементом свободной решётки при любой перестановке x, y и z. То же справедливо и для $s(x, y, z)$. Пусть $f(x, y, z) = (x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z)$. Неравенство дистрибутивности показывает, что $(x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z) \leq ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \wedge (y \vee z)$, т. е. $f(x, y, z) \leq t(x, y, z)$. В свою очередь, неравенство модулярности даёт $(x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge z)$, т. е. $f(x, y, z) \geq f^{\#}(x, y, z)$. Тем самым, в любой решётке для любых её элементов x, y и z выполняется $s(x, y, z) \leq f^{\#}(x, y, z) \leq f(x, y, z) \leq t(x, y, z)$.

Доказательству теоремы 1 предпошлём несколько утверждений, представляющих самостоятельный интерес.

ЛЕММА 1. *Пусть x — некоторый элемент решётки L.*

(1) *Элемент x левомодулярен тогда и только тогда, когда $f(x, y, z) = f^{\#}(x, y, z)$ для любых y и z из L.*

(2) *Если элемент x вполне модулярен, то $f(y, z, x) = f^{\#}(y, z, x)$ для любых y и z из L.*

(3) *Если $f(y, z, x) = f^{\#}(y, z, x)$ для любых y и z из L, то элемент x правомодулярен и коправомодулярен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Из левомодулярности элемента x и соотношения $y \wedge z \leq y \vee z$ следует, что $f(x, y, z) = (x \vee (y \wedge z)) \wedge (y \vee z) = (x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge z) = f^{\#}(x, y, z)$. Обратно, если $y \leq z$, то $f(x, y, z) = (x \vee y) \wedge z = f^{\#}(x, y, z) = (x \wedge z) \vee y$. Теперь левомодулярность x следует из определения.

(2) Пусть x вполне модулярен. Тогда ввиду правомодулярности элемента x выполняется $x \wedge f(y, z, x) = x \wedge (y \vee (z \wedge x)) \wedge (z \vee x) = x \wedge (y \vee (z \wedge x)) = (x \wedge y) \vee (z \wedge x) \leq s(x, y, z) \leq f^{\#}(y, z, x)$. С другой стороны, коправомодулярность элемента x влечёт двойственное к предыдущему неравенство

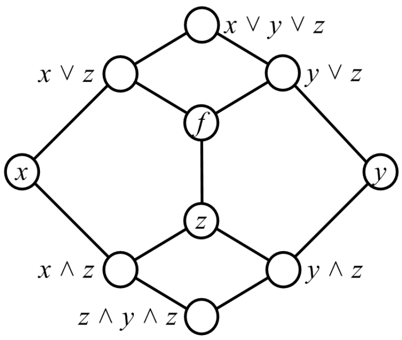

Рис. 3

$x \vee f^{\#}(y,z,x) \geq f(y,z,x)$. Теперь в силу левомодулярности элемента x и неравенства $f^{\#}(y,z,x) \leq f(y,z,x)$ имеем $f(y,z,x) = f(y,z,x) \wedge (x \vee \vee f^{\#}(y,z,x)) = (f(y,z,x) \wedge x) \vee f^{\#}(y,z,x) = f^{\#}(y,z,x)$.

(3) Для $x \leq z$ имеем $f(y,z,x) = (y \vee x) \wedge z = f^{\#}(y,z,x) = (y \wedge z) \vee x$. Это означает коправомодулярность элемента x. Правомодулярность элемента x получается из соображений двойственности.

Отметим, что утверждения, обратные к сформулированным в пп. (2) и (3) этой теоремы, места не имеют. Для утверждения из п. (2) соответствующим примером является упоминавшийся выше пентагон: указанный там элемент a не является левомодулярным, но, как нетрудно проверить, $f(x,y,a) = f^{\#}(x,y,a)$ для любых элементов x и y этой решётки. Что касается утверждения из п. (3), то пример решётки, опровергающий обратное утверждение, приведён на рис. 3. Легко проверить, что в этой решётке элемент x является правомодулярным и коправомодулярным, однако элементы $f(y,z,x)$ (для краткости обозначим через f) и $f^{\#}(y,z,x)$ (он совпадает с z) различны.

ЛЕММА 2. *Элемент x решётки L одновременно левомодулярен и коправомодулярен тогда и только тогда, когда $t(x,y,z) = (x \wedge (y \vee z)) \vee \vee (y \wedge (x \vee z))$ для любых элементов y и z из L.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $y \vee z \geq y \wedge (x \vee z)$ и $x \vee z \geq x$ имеем $(x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge (x \vee z)) = (x \vee (y \wedge (x \vee z)) \wedge (y \vee z) = ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \wedge (y \vee z) = = t(x,y,z)$. Обратно, если $x \leq z$, то $t(x,y,z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z) =$

$= (x \vee y) \wedge z = (x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge (x \vee z)) = x \vee (y \wedge z)$. Коправомодулярность x следует из определения. Если же $y \leq z$, то $t(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z = (x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge (x \vee z)) = (x \wedge z) \vee y$, т. е. элемент x левомодулярен.

ЛЕММА 3. *Пусть y и z — произвольные элементы решётки.*

(1) *Если элемент x коправомодулярен, то $(x \vee y) \wedge (z \vee x) = x \vee \vee t(x, y, z)$.*

(2) *Если элемент x левомодулярен и коправомодулярен, то $(x \vee y) \wedge \wedge (y \vee z) = y \vee t(x, y, z)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Поскольку $x \leq (x \vee y) \wedge (z \vee x)$, коправомодулярность x показывает, что $x \vee t(x, y, z) = x \vee ((x \vee y) \wedge (z \vee x) \wedge (y \vee z)) = = ((x \vee y) \wedge (z \vee x)) \wedge (x \vee y \vee z) = (x \vee y) \wedge (z \vee x)$.

(2) Из леммы 2 следует, что $y \vee t(x, y, z) = y \vee (x \wedge (y \vee z)) \vee (y \wedge (x \vee z)) = = y \vee (x \wedge (y \vee z))$. Равенство $y \vee (x \wedge (y \vee z)) = (x \vee y) \wedge (y \vee z)$ вытекает из левомодулярности элемента x и неравенства $y \leq y \vee z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1. Пусть L — решётка, порождённая произвольным элементом c и вполне модулярными элементами a, b. В [12] указаны 11 соотношений, выполнение которых для порождающих элементов решётки влечёт её модулярность. Перечислим эти соотношения, используя введённые выше обозначения:

$$f(a, b, c) = f^{\#}(a, b, c), \tag{1}$$

$$f(b, c, a) = f^{\#}(b, c, a), \tag{2}$$

$$f(c, a, b) = f^{\#}(c, a, b), \tag{3}$$

$$\begin{gathered} t(a, b, c) = ((a \wedge (b \vee c)) \vee ((a \vee b) \wedge c)) \wedge \\ ((b \wedge (a \vee c)) \vee ((b \vee a) \wedge c)) \wedge ((a \wedge (c \vee b)) \vee ((a \vee c) \wedge b)), \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} s(a, b, c) = ((a \vee (b \wedge c)) \wedge ((a \wedge b) \vee c)) \vee \\ ((b \vee (a \wedge c)) \wedge ((b \wedge a) \vee c)) \vee ((a \vee (c \wedge b)) \wedge ((a \wedge c) \vee b)), \end{gathered} \tag{5}$$

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee t(a, b, c), \tag{6}$$

$$(b \vee a) \wedge (b \vee c) = b \vee t(a, b, c), \tag{7}$$

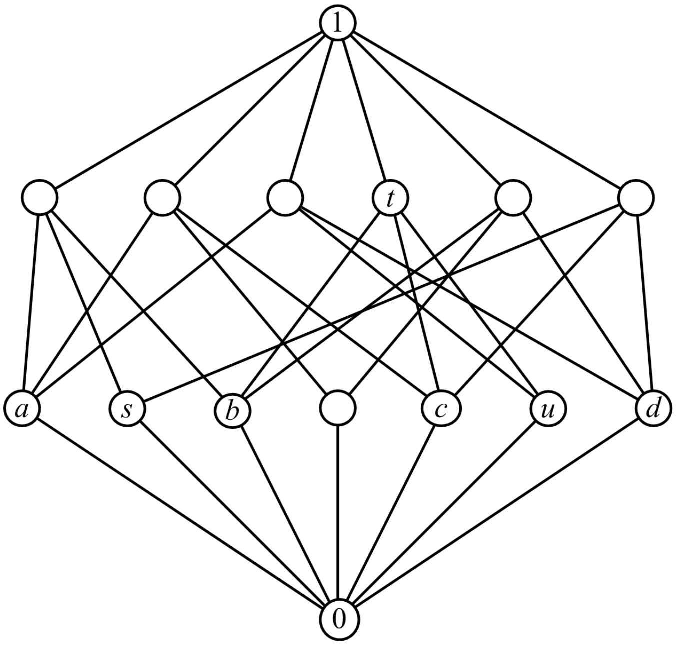

Рис. 4

$$(c \vee a) \wedge (c \vee b) = c \vee t(a, b, c), \tag{8}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge s(a, b, c), \tag{9}$$

$$(b \wedge a) \vee (b \wedge c) = b \wedge s(a, b, c), \tag{10}$$

$$(c \wedge a) \vee (c \wedge b) = c \wedge s(a, b, c). \tag{11}$$

Теперь проверим, что из вполне модулярности элементов a и b следуют эти одинадцать соотношений. Первые три соотношения следуют из леммы 1; соотношения (4) и (5) — из леммы 2 и двойственного к ней утверждения; последние шесть соотношений — из леммы 3 и двойственных утверждений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Прежде всего приведём пример, демонстрирующий справедливость теоремы при $n = 4$. Диаграмма соответствующей решётки представлена на рис. 4. В этой решётке порождающими являются элементы a, b, c, d, и все они вполне модулярны. Однако сама решётка модулярной не является — элементы $t \vee s$, s, t, u, $t \wedge s$ образуют пентагон.

ЛЕММА 4. *Пусть L — решётка, порождённая n вполне модулярными атомами. Тогда прямое произведение L на двухэлементную цепь является решёткой, порождённой $n+1$ вполне модулярными атомами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $a_1, a_2, \ldots, a_n$ те n вполне модулярных атомов, которые порождают решётку L, а через 0 и 1 — наименьшие и наибольшие элементы этих решёток. Легко проверить, что элементы $(a_1, 0), (a_2, 0), \ldots, (a_n, 0)$ и $(0, 1)$ служат порождающими элементами указанного прямого произведения, являясь при этом его вполне модулярными атомами.

Доказательство теоремы 2 для $n > 4$ завершается применением необходимого числа раз леммы 4.

Возможно, существует немодулярная решётка, порождённая четырьмя вполне модулярными элементами, содержащая меньше элементов, чем та, которая представлена на рис. 4. Однако наш пример интересен тем, что указанная в нём решётка атомична*) и порождающие её вполне модулярные элементы являются атомами. Если же в атомичной решётке конечной длины все атомы вполне модулярны (и даже только коправомодулярны), то такая решётка модулярна [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Stern*, Semimodular lattices. Theory and applications (Encyclopedia Math. Appl., **73**), Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999.
2. *S. Maeda*, On distributive pairs in lattices, Acta Math. Hung., **45**, Nos. 1/2 (1985), 133—140.
3. *L. R. Wilcox*, Modularity in the theory of lattices, Ann. Math. (2), **40** (1939), 490—505.
4. *S. Maeda*, On finite-modular atomistic lattices, Algebra Univers., **12** (1981), 76—80.

*) В русскоязычной литературе для этого понятия используется также термин *точечная решётка*.

5. *B. M. Vernikov, M. V. Volkov*, Modular elements of the lattice of semigroup varieties. II, in: G. Dorfer (ed.) et al., Proc. of the 70th workshop on general algebra „70. Arbeitstagung Allgemeine Algebra“ (Vienna, Austria, May 26–29, 2005), (Contrib. General Algebra, **17**), Klagenfurt, Verlag Johannes Heyn, 2006, 173—190.
6. *Б. М. Верников*, Верхнемодулярные элементы решётки многообразий полугрупп. II, Фундам. прикл. матем., **14**, № 7 (2008), 43—51.
7. *R. Schmidt*, Modulare Untergruppen endlicher Gruppen, Ill. J. Math., **13** (1969), 358—377.
8. *R. K. Amayo, J. Schwarz*, Modularity in Lie algebras, Hiroshima Math. J., **10** (1980), 311—322.
9. *G. Birkhoff*, Neutral elements in general lattices, Bull. Am. Math. Soc., **46** (1940), 702—705.
10. *А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов*, О подрешётке, порождённой модулярными элементами, Межд. алгебр. конф. „Алгебра и линейная оптимизация“, посвящ. 100-летию С. Н. Черникова. Тез. докл. (Екатеринбург, 14–19 мая 2012 г.), Екатеринбург, изд-во УМЦ-УПИ, 2012, 47.
11. *А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов*, О решётках, порождённых вполне модулярными элементами, Межд. конф. „Мальцевские чтения“. Тез. докл. (Новосибирск, 13–15 ноября 2012 г.), Новосибирск, ИМ СО РАН, 2012, 52.
12. *А. Г. Гейн, М. П. Шушпанов*, Об определяющих соотношениях свободной модулярной решётки ранга 3, Изв. вузов. Матем., 2013, № 10, 69—72.

Поступило 17 августа 2013 г.

Окончательный вариант 28 ноября 2013 г.

Адреса авторов:

ГЕЙН Александр Георгиевич, Уральский федерал. ун-т им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, ул. Мира, 19, г. Екатеринбург, 620002, РОССИЯ. e-mail: Alexander.Gein@usu.ru

ШУШПАНОВ Михаил Павлович, Уральский федерал. ун-т им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, ул. Мира, 19, г. Екатеринбург, 620002, РОССИЯ. e-mail: Mikhail.Shushpanov@gmail.com