FILTERS BASED ON AGGREGATION OPERATORS.
Part 2. The Kolmogorov filters[1]

Labunets V.G., Gainanov D.N.[1], Ostheimer E.[2]
[1] *Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin*
pr. Mira, 19, Yekaterinburg, Sverdlovsk region, 620002, Russian Federation
ph.: 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com
[2] *Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA*

Abstract — In this work, a new class of nonlinear filters called the generalized Kolmogorov filters for image processing is introduced. These filters are based on Kolmogorov-Maslov-Matkowski aggregation operators. We show that a large body of nonlinear filters proposed to date constitute a proper subset of the generalized Kolmogorov filters.

ФИЛЬТРЫ,ОСНОВАННЫЕ НА АГРЕГАЦИОННЫХ ОПЕРАТОРАХ
Часть 2. Фильтры Колмогорова

Лабунец В.Г., Гайнанов Д.Н.[1], Остхаймер Е.[2]
[1]*Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина*
проспект Мира, 19, Екатеринбург, Свердловская обл.,620002, Россия
тел.: (343) 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com
[2]*Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA*

Аннотация — В данной работе вводится новый класс нелинейных фильтров для обработки мультиспектральных изображений, названный векторными медианными агрегационными фильтрами. Они основываются на произвольной паре агрегационных операторов и одном селекционном правиле. Мы показываем, что большое множество нелинейных фильтров, предложенных к настоящему времени являются собственным подмножеством множества новых фильтров.

I. Введение

Согласно А.Колмогорову [1] последовательность функций $\mathbf{Aggeg}_N$ определяет множество средних, если удовлетворяются следующие ограничения.

1) Для каждого фиксированного N функция $\mathbf{Agg}_N(x_1,x_2,...,x_N)$ является непрерывной и монотонной по каждой переменной.
2) $\mathbf{Agg}_N(x_1,x_2,...,x_N)$ - симметричная функция.
3) Среднее одинаковых чисел эквивалентно их общему значению: $\mathbf{Agg}_N(x,x,...,x)=x$.
4) Произвольная группа переменных может быть заменена их общим средним:

$$\mathbf{Agg}_{N+M}(x_1,x_2,...,x_N,y_1,y_2,...,y_M)=$$
$$=\mathbf{Agg}_{N+M}(m,m,...,m,y_1,y_2,...,y_M),$$

где $m=\mathbf{Agg}_N(x_1,x_2,...,x_N)$.

Предложение 1. (Колмогоров). Если условия 1)–4) удовлетворяются, то среднее $\mathbf{Agg}_N(x_1,x_2,...,x_N)$ имеет следующую форму:

$$\mathbf{Kolm}\ K\,|\,x_1,x_2,...,x_N\ =K^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}K\ \ x_i\ \right],$$

гдее K есть строго монотонная функция.

Ниже перечислены частные случае средних по Коломогорову.

1) Арифметическое среднее ($K(x)=x$):

$$\mathbf{Mean}(x_1,x_2,...,x_N)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i. \qquad (1)$$

2) Геометрическое среднее ($K(x)=\log(x)$):

$$\mathbf{Geo}(x_1,x_2,...,x_N)=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N}x_i}=\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}\ln x_i\right). \qquad (2)$$

3) Гармоническое среднее ($K(x)=x^{-1}$):

$$\mathbf{Harm}(x_1,x_2,...,x_N)=\frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}}=\frac{N}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}}. \qquad (3)$$

4) Широко распространенный случай соответствует функции $K(x)=x^p$, при которой получаются степенные средние (средние Гельдера):

$$\mathbf{Power}_p\ \ x_1,x_2,...,x_N\ =\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (4)$$

Это семейство представляет интерес поскольку оно состоит из множества различных средних, получающихся при различных значениях p.

II. Основная часть

Введем модель наблюдаемого сигнала

$$f(\mathbf{x})=s(\mathbf{x})+\mu(\mathbf{x}), \qquad (5)$$

где $s(\mathbf{x})$ полезное серое изображение и $\eta(\mathbf{x})$ обозначает аддитивный шум, добавленный к полезному сигналу $s(\mathbf{x})$, в результате чего получается зашумленное изображение $f(\mathbf{x})$. Здесь $\mathbf{x}=(i,j)\in\mathbf{Z}^2$ (или $\mathbf{x}=(i,j,k)\in\mathbf{Z}^3$) - 2D (или - 3D) координаты, обозначающие локализацию соответствующего пикселя $f(\mathbf{x})$. Если $\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^2,\mathbf{Z}^3$, то $f(\mathbf{x}),s(\mathbf{x})$, и $\eta(\mathbf{x})$ - 2D или 3D изображения, соответственно.

Цель фильтрации – устранения шума в изображении настолько, насколько это возможно. Это означает, что нужно найти такой метод оценки полезного сигнала $s(\mathbf{x})$, при котором оценка $\hat{s}(\mathbf{x})$ в макси-

1

мальной степени похожа на полезный сигнал $s(\mathbf{x})$. В линейном усредняющем 2D фильтре с квадратной скользящей маской $\left[\mathrm{M}_{(i,j)}(m,n)\right]_{m=-r,n=-r}^{m=+r,n=+r}$ размером $N=(2r+1)\times(2r+1)$, локализованной в точке (i,j), пиксель $f(i,j)$ заменяется средним значением всех пикселей, попавших внутрь этой маски: $\hat{s}(i,j)=\underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{Mean}}\left(f(m,n)\right)$, где $\hat{s}(i,j)$ - оценка сигнала, и $\left(f(m,n)\right)_{(m,n)\in M_{(i,j)}}$ - обозначает фрагмент изображения, выделенный из f, движущейся маской $\mathrm{M}_{(i,j)}$ и находящейся в позиции (i,j).

Когда этот фильтр модифицируется так, что вместо классического среднего вычисляется обобщенное среднее Колмогорова, то получается нелинейный фильтр Колмогорова:

$$\hat{s}(i,j)=\underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{Kolm}}\left(K\mid f(m,n)\right)=$$
$$=K^{-1}\left[\sum_{(m,n)\in M_{(i,j)}}^{N}\frac{1}{N}K\left(f(m,n)\right)\right]. \tag{6}$$

Маслов [2] модифицировал четвертую аксиому Колмогорова следующим образом: для множества весов w_i, и множества случайных чисел x_i, $i=1,2,...,N$, и произвольного числа a, должно иметь место ограничение:

$$\mathbf{Maslov}\left(K\mid x_1+a,x_2+a,...,x_N+a\right)=$$
$$=K^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\bar{w}_iK\left(x_i+a\right)\right]=Ca+K^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\bar{w}_iK\left(x_i\right)\right] \tag{7}$$

где C - произвольное число, независящее от a.
Тогда следующее утверждение верно [2].

Предложение 2. Из условия (7) следует, что функция $K(x)$ имеет форму $K(x)=A\mathbf{exp}(-\beta x)$, или $K(x)=Ax+D$, где числа β и D - ненулевые.

Согласно предложению 2, нелинейное усреднение с весами w_i случайных переменных $x_1,x_2,...,x_N$ имеет форму

$$\mathbf{Maslov}^{\beta}_{\bar{w}_1,\bar{w}_2,...,\bar{w}_N,}\left(x_1,x_2,...,x_N\right)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\sum_{i=1}^{N}\bar{w}_ie^{-\beta x_i}\right].$$

Агрегационные фильтры, соответствующие усреднению по Маслову, формируют β-параметризованное семейство нелинейных фильтров :

$$\hat{s}(i,j)=\underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{Maslov}^{\beta}}\left(f(m,n)\right)=$$
$$=\frac{1}{\beta}\ln\left[\frac{1}{N}\sum_{(m,n)\in M_{(i,j)}}^{N}\bar{w}(m,n)e^{-\beta\cdot f(m,n)}\right]. \tag{8}$$

Хорошо известно [3], что относительно некоторых естественных предположений на набор функций $K_1,K_2,...,K_M$, усредняющая функция

$$\mathbf{Agg}\left(K_1,K_2,...,K_N\mid x_1,x_2,...,x_N\right)=$$
$$=\left(K_1+K_2+...+K_N\right)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\bar{w}_iK_i\left(x_i\right)\right]$$

является обобщенным средним по Колмогорову и называется средним по Матковскому [3] . Оно обозначается как

$$\mathbf{Matkow}_{\bar{w}_1,\bar{w}_2,...,\bar{w}_N}\left(K_1,K_2,...,K_N\mid x_1,x_2,...,x_N\right)=$$
$$=\left(K_1+K_2+...+K_N\right)^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\bar{w}_iK_i\left(x_i\right)\right].$$

Агрегационные фильтры, ассоциированные со средним по Матковскому, формируют новое семейство нелинейных фильтров:

$$\hat{s}(i,j)=\underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{Matkow}}\left(K_{m,n}\mid f(m,n)\right)=$$
$$=\left(\sum_{(m,n)\in M_{(i,j)}}^{N}K_{m,n}\right)^{-1}\left[\sum_{(m,n)\in M_{(i,j)}}^{N}\bar{w}(m,n)K_{m,n}\left(f(m,n)\right)\right].$$

Мы определяем новые обобщенные средние Колмогорова, Маслова и Матковского следующим образом:

$$\mathbf{GenKolm}\left(K\mid x_1,x_2,...,x_N\right)=K^{-1}\left[\mathbf{Aggreg}\left(K\left(x_i\right)\right)\right],$$
$$\mathbf{GenMaslov}^{\beta}\left(x_1,x_2,...,x_N\right)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\mathbf{Aggreg}\left(e^{-\beta x_i}\right)\right],$$
$$\mathbf{GenMatkow}_{\bar{w}_1,...,\bar{w}_N}\left(K_1,...,K_N\mid x_1,x_2,...,x_N\right)=$$
$$=\left(K_1+...+K_N\right)^{-1}\left[\mathbf{Aggreg}\left(K_i\left(x_i\right)\right)\right].$$

Агрегационные фильтры, ассоциированные с этими средними, агрегируют K- деформированные пиксели:

$$\hat{s}(i,j)=\underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{GenKolm}}\left(K\mid f(m,n)\right)=$$
$$=K^{-1}\left[\underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{Agg}}\left(K\left(f(m,n)\right)\right)\right],$$
$$\hat{s}(i,j)=\underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{GenMaslov}^{\beta}}\left(f(m,n)\right)=\frac{1}{\beta}\ln\left[\mathbf{Agg}\left(e^{-\beta\cdot f(m,n)}\right)\right],$$
$$\hat{s}(i,j)=\underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{GenMatkow}}\left(K_{m,n}\mid f(m,n)\right)=$$
$$=\left(\sum_{(m,n)\in M_{(i,j)}}^{N}K_{m,n}\right)^{-1}\left[\mathbf{Agg}\left(K_{m,n}\left(f(m,n)\right)\right)\right]$$

Можно показать, что большое число известных нелинейных фильтров, являются частными случаями введенных фильтров.

III. Заключение

Мы разработали новые теоретические основы для синтеза нелинейных фильтров, основанных на различных версиях среднего по Колмогорову. Главная цель работы – показать, что агрегационные фильтры Колмогорова могут быть использованы для решения проблем фильтрации изображений в естественной и эффективной манере.

Работа была поддержана грантами РФФИ № 13-07-12168, РФФИ № 13-07-00785 и грантом МОН РФ t №218-03-167 (согласно постановлению МОН РФ № 02.G25.31.0055 от 12.02. 2013).

IV. References

[1] Kolmogorov A. Sur la notion de la moyenne. *Atti Accad. Naz. Lincei,* 1930, *vol.* 12, pp. 388–391.
[2] Maslov V.P. Axioms of Nonlinear Averaging in Financial Mathematics and the Stock Price Dynamics. *Teor. Veroyatnost. i Primenen, 2003, Vol.* 48, No. 4, pp. 800–810.
[3] Matkowski J. Generalized weighted quasi-arithmetic means. *Aequat. Math.*, 2010, Vol. 79, pp. 203–212.