FILTERS BASED ON AGGREGATION OPERATORS.
Part 3. The Heron filters

Labunets V.G., Gainanov D.N., Tarasov F.D.[1], Ostheimer E.[2]
[1] *Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin*
pr. Mira, 19, Yekaterinburg, Sverdlovsk region, 620002, Russian Federation
ph.: 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com
[2] *Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA*

Abstract — In this work, a new class of nonlinear filters called the generalized arithmetic and median Heronian filters for image processing is introduced. These filters are based on Heronian mean.

ФИЛЬТРЫ,ОСНОВАННЫЕ НА АГРЕГАЦИОННЫХ ОПЕРАТОРАХ
Часть 3. Фильтры Герона

Лабунец В.Г., Гайнанов Д.Н., Тарасов А.Д.[1], Остхаймер Е.[2]
[1] *Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина*
проспект Мира, 19, Екатеринбург, Свердловская обл.,620002, Россия
тел.: (343) 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com
[2] *Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA*

Аннотация — В данной работе вводится новый класс нелинейных фильтров для обработки мультиспектральных изображений, названный обобщенными арифметическими и медианными фильтрами Герона. Эти фильтры основываются на среднем по Герону.

I. Введение

Классические определения среднего и медианы по Герону двух чисел a и b имеют вид:

$$\mathbf{MeanHeron}\ a,b = a+\sqrt{ab}+b\ /3 = \sqrt{aa}+\sqrt{ab}+\sqrt{bb}\ /3, \qquad (1)$$

$$\mathbf{MedHeron}\ a,b = \mathbf{Med}\ \sqrt{aa},\sqrt{ab},\sqrt{bb}\ .$$

(Герон из Александрии –античный математик).

Пусть $(x_1,x_2,...,x_N)$ - набор из N положительных реальных чисел. Очевидный способ обобщения уравнения (1) на набор чисел $(x_1,x_2,...,x_N)$ состоит в организации квадратных корней из $N(N+1)/2$ различных попарных произведений $\sqrt{x_i x_j}$, $i \le j$.

Определение 1. Среднее и медиана по Герону N положительных чисел $(x_1,x_2,...,x_N)$ есть:

$$\mathbf{MeanHeron}_2(x_1,x_2,...,x_N) = \frac{2}{N(N+1)}\sum_{i\le}\sum_{j}\sqrt{x_i x_j},$$

$$\mathbf{MedHeron}_2(x_1,x_2,...,x_N) = \mathbf{Med}\left[\ \sqrt{x_i x_j}\ \ {}_{i\le j}\right].$$

Дальнейшее обобщение связано с вычислением корня k-ой степени из всех $C^k_{N+k-1} = \dfrac{N+k-1\ !}{k!\ \ N-1\ !}$ различных произведений (с повторениями) k чисел из набора $(x_1,x_2,...,x_N)$: $\sqrt[k]{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}}$.

Все такие корни можно усреднять и искать среди них медиану, что дает нам новые средние и медиану по Герону :

$$\mathbf{MeanHeron}_k(x_1,x_2,...,x_N) = \frac{2}{C^k_{N+k-1}}\sum_{i_1\le}\sum_{i_2\le}...\sum_{\le i_2}\sqrt[k]{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}}, \qquad (2)$$

$$\mathbf{MedHeron}_k(x_1,x_2,...,x_N) = \mathbf{Med}\left[\ \sqrt[k]{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}}\ \ {}_{i_1\le i_2\le...\le i_k}\right]. \qquad (3)$$

II. Основная часть

Введем модель наблюдаемого сигнала

$$f(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}), \qquad (5)$$

где $s(\mathbf{x})$ полезное серое изображение и $\eta(\mathbf{x})$ обозначает аддитивный шум, добавленный к полезному сигналу $s(\mathbf{x})$, в результате чего получается зашумленное изображение $f(\mathbf{x})$. Здесь $\mathbf{x}=(i,j)\in\mathbf{Z}^2$ (или $\mathbf{x}=(i,j,k)\in\mathbf{Z}^3$) - 2D (или - 3D) координаты, обозначающие локализацию соответствующего пикселя $f(\mathbf{x})$. Если $\mathbf{x}\in\mathbf{Z}^2,\mathbf{Z}^3$, то $f(\mathbf{x}), s(\mathbf{x})$, и $\eta(\mathbf{x})$ - 2D или 3D изображения, соответственно.

Цель фильтрации – устранения шума в изображении настолько, насколько это возможно. Это означает, что нужно найти такой метод оценки полезного сигнала $s(\mathbf{x})$, при котором оценка $\hat{s}(\mathbf{x})$ в максимальной степени похожа на полезный сигнал $s(\mathbf{x})$.

В усредняющем и медианном 2D фильтрах с квадратной скользящей маской $\left[\mathrm{M}_{(i,j)}(m,n)\right]_{m=-r,n=-r}^{m=+r,n=+r}$ размером $N = 2r+1 \times 2r+1$, локализованной в точке (i,j), пиксель $f(i,j)$ заменяется средним

значением или медианой всех пикселей, попавших внутрь этой маски:

$$\hat{s}(i,j) = \underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{Mean}} \; f(m,n) \;,$$

$$\hat{s}(i,j) = \underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{Med}} \; f(m,n) \;,$$

где $\hat{s}(i,j)$ - оценка сигнала, и $f(m,n)_{(m,n)\in M_{(i,j)}}$ - обозначает фрагмент изображения, выделенный из f, движущейся маской $\mathrm{M}_{(i,j)}$ и находящейся в позиции (i,j). Когда этот фильтр модифицируется так

$$\hat{s}(i,j) = \underset{(k,l)\in M(i,j)}{\mathbf{Aggreg}} \; f(k,l) \;,$$

то получается агрегационный фильтр, свойства которого зависят от агрегационного оператора **Aggreg**.

Введем $k+1$ -значную функцию на маске $\sigma : M \to \; 0,1,...,k$. Очевидно, $w(\sigma) = \sum_{(n,m)\in M} \sigma(n,m)$ - вес функции σ и $w(\sigma) \in \; 0,1,...,Nk$, где $N = |M|$. Если $B_{k+1}^N = \; \sigma \,|\, \sigma : M \to \; 0\,,1\,,2\,,k.$. - множество всех $k+1$ -значных функций, то

$$B_{k+1}^N = {}^0B_{k+1}^N \cup ... \cup {}^rB_{k+1}^N \cup ... \cup {}^{Nk}B_{k+1}^N = \bigcup_{r=0}^{Nk} {}^rB_{k+1}^N,$$

где

$${}^iB_{k+1}^N = \; {}^i\sigma \,|\; {}^i\sigma : M \to \; 0,1,...,k \quad \& \; w({}^i\sigma) = i$$

- множество всех $k+1$ -значных функций с весом r, а $\left|{}^rB_{k+1}^N\right|$ - мощность множества ${}^rB_{k+1}^N$. Определим произведение пикселей

$$f^{\,r\sigma} := \prod_{(n,m)\in M} f(n,m)^{\;r\sigma(n,m)}$$

ассоциированных с $k+1$ -значной функцией ${}^r\sigma$. Используя это произведение, определим обобщенный агрегационный оператор Герона следующим образом:

$$\hat{s}(i,j) = \underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{GenHeron}^r} \; f(m,n) \;=$$

$$= \underset{\text{over all } {}^r\sigma\in{}^rB_2^N}{\mathbf{Aggreg}} \left(\sqrt[r]{\prod_{(n,m)\in M_{(i,j)}} f(n,m)^{\;r\sigma(n,m)}} \right).$$

В частном случае имеем:

1) арифметический r -фильтр Герона

$$\hat{s}(i,j) = \underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{MeanHeron}^r} \; f(m,n) \;=$$

$$\underset{\text{over all } {}^r\sigma\in{}^rB_2^N}{\mathbf{Mean}} \left(\sqrt[r]{\prod_{(n,m)\in M_{(i,j)}} f(n,m)^{\;r\sigma(n,m)}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\left|{}^rB_{k+1}^N\right|} \sum_{{}^r\sigma\in{}^rB_2^N} \sqrt[r]{\prod_{(n,m)\in M_{(i,j)}} f(n,m)^{\;r\sigma(n,m)}},$$

2) медианный r -фильтр Герона

$$\hat{s}(i,j) = \underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{MedHeron}^r} \; f(m,n) \;=$$

$$= \underset{(n,m)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{Med}} \left[\left\{ \sqrt[r]{f(n,m)^{\;r\sigma(n,m)}} \right\}_{\text{over all } {}^r\sigma\in{}^rB_{k+1}^N} \right].$$

3) фильтр Колмогорова-Герона

$$\hat{s}(i,j) = \underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{KolmHeron}^r} \; K \,|\, f(m,n) \;=$$

$$= K^{-1}\left[\underset{\text{over all } {}^r\sigma\in{}^rB_{k+1}^N}{\mathbf{Mean}} \left(K\left(\sqrt[r]{\prod_{(n,m)\in M_{(i,j)}} f(n,m)^{\;r\sigma(n,m)}} \right) \right) \right] =$$

$$= K^{-1}\left[\frac{1}{\left|{}^rB_{k+1}^N\right|} \sum_{{}^r\sigma\in{}^rB_{k+1}^N} K\left(\sqrt[r]{\prod_{(n,m)\in M_{(i,j)}} f(n,m)^{\;r\sigma(n,m)}} \right) \right],$$

где $r \le k$.

a) b)

c) $\underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{MedHeron}^2}$ d) $\underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{MeanHeron}^2}$

Fig. 1. Original (a) and noise (b) images. Denoised images (c) and (d).
Рис. 1. Исходное (a) и зашумленное (b) изображения. Отфильтрованные изображения (c) и (d).

На Рис.1 представлены примеры $\underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{MeanHeron}^2}$ - и $\underset{(m,n)\in M_{(i,j)}}{\mathbf{MedHeron}^2}$ -фильтрации для $N = |M| = 5\times5$.

III. Заключение

Мы разработали новые теоретические основы для синтеза нелинейных фильтров, основанных на различных версиях среднего по Герону. Главная цель работы – показать, что фильтры Герона могут быть использованы для решения проблем фильтрации изображений.

Работа была поддержана грантами РФФИ № 13-07-12168, РФФИ № 13-07-00785 и грантом МОН РФ t №218-03-167 (согласно постановлению МОН РФ № 02.G25.31.0055 от 12.02. 2013).

IV. References

[1] Sykora S. Mathematical Means and Averages: Generalized Heronian means I, Stan's Library, Ed.S.Sykora, Vol.III, 2009.
[2] Sykora S., Generalized Heronian means II, *Stan's Library*, Ed.S.Sykora, Vol.III, 2009.
[3] S.Sykora S., Generalized Heronian means III, *Stan's Library*, Ed.S.Sykora, Vol.III, 2009.