Том 20 № 0 2044

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО НИКОЛЬСКОГО МЕЖДУ РАВНОМЕРНОЙ И L_q–НОРМОЙ С УЛЬТАСФЕРИЧЕСКИМ ВЕСОМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ НА ОТРЕЗКЕ[1]

В. В. Арестов, М. В. Дейкалова

Изучается неравенство Никольского для алгебраических многочленов на отрезке $[-1,1]$ между равномерной нормой и нормой пространства L_q^{ϕ}, $1\le q<\infty$, с ультрасферическим весом $\phi(x)=\phi^{(\alpha,\alpha)}(x)=(1-x^2)^{\alpha}$, $\alpha\ge -1/2$. Доказано, что многочлен с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве L_q^{ψ} с весом Якоби $\psi(x)=\phi^{(\alpha+1,\alpha)}(x)=(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\alpha}$, является экстремальным в неравенстве Никольского. При обосновании результата используется обобщенный сдвиг.

Ключевые слова: алгебраический многочлен; неравенство Никольского; многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля, обобщенный сдвиг.

AMS-классификация 41A17

1. Введение. Постановка задач

1.1. Неравенство Никольского на отрезке с весом

Пусть υ есть функция, суммируемая, неотрицательная, почти всюду отличная от нуля на $(-1,1)$; такую функцию мы будем называть весом. Обозначим через $L_q^{\upsilon}=L_q^{\upsilon}(-1,1)$, $1\le q<\infty$, пространство (вещественнозначных) измеримых на $(-1,1)$ функций f таких, что произведение $|f|^q\upsilon$ суммируемо на $(-1,1)$; это есть банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{L_q^{\upsilon}(-1,1)}=\left(\int\limits_{-1}^{1}|f(x)|^q\upsilon(x)\,dx\right)^{1/q},\qquad f\in L_q^{\upsilon}(-1,1).$$

Наряду с $L_q^{\upsilon}(-1,1)$ рассмотрим пространство $C=C[-1,1]$ функций непрерывных на отрезке $[-1,1]$ с равномерной нормой

$$\|f\|_{C[-1,1]}=\max\{|f(x)|\colon x\in[-1,1]\}.$$

Обозначим через $M(n,\upsilon)=M(n,\upsilon)_q$ наилучшую (наименьшую возможную) константу в неравенстве

$$\|p\|_{C[-1,1]}\le M(n,\upsilon)\,\|p\|_{L_q^{\upsilon}(-1,1)},\qquad p\in\mathscr{P}_n, \tag{1.1}$$ Nik-ineq-ups

на множестве $\mathscr{P}_n=\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ алгебраических многочленов (одного переменного) степени (не выше) n с вещественными коэффициентами.

Объектом исследования данной работы является неравенство (1.1) для ультрасферического веса

$$\phi(x)=\phi^{(\alpha)}(x)=(1-x^2)^{\alpha},\qquad \alpha>-1. \tag{1.2}$$ ultra-ves

Пространство L_q^{ϕ} для веса (1.2) будет в дальнейшем обозначаться через L_q^{α}. Таким образом, в данной работе изучается неравенство

$$\|p\|_C\le M_n\,\|p\|_{L_q^{\alpha}},\qquad p\in\mathscr{P}_n, \tag{1.3}$$ Nik-ineq-alp

с наилучшей константой $M_n=M(n,\phi^{(\alpha)})_q$.

Неравенства (1.1), (1.3) являются аналогами неравенства Никольского [1] для алгебраических многочленов на отрезке. Такие неравенства и более общие неравенства для равномерной нормы и интегральных норм с весами (в особенности с весами Якоби) производных алгебраических многочленов и самих многочленов изучали А. А. Марков, В. А. Марков, С. Н. Бернштейн, М. К. Потапов, И. К. Даугавет, С. З. Рафальсон, В. И. Иванов, С. В. Конягин, Б. Боянов, П. Ю. Глазырина, И. Е. Симонов и многие другие математики; см. монографии [3–8], работы [9–19] и приведенную там библиографию. В частности, в [12] содержится порядок поведения наилучшей константы $M(n,\phi^{(\alpha)})_q$ в (1.3) по n при $n\to\infty$, а именно

$$M(n,\phi^{(\alpha)})_q\asymp n^{\gamma},\qquad \gamma=\frac{2(\alpha+1)}{q}.$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Большое число исследований в настоящее время посвящено родственным точным неравенствам для тригонометрических полиномов. Такие неравенства изучали С. Н. Бернштейн, M. Riesz, G. Szegö, A. Zygmund, С. Б. Стечкин, A. P. Calderon, G. Klein, Л. В. Тайков, E.B. Saff, T. Sheil-Small, P. Nevai, Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд, В. И. Иванов, С. В. Конягин, А. И. Козко, Q.I. Rahman, G.Schmeisser, Н. П. Корнейчук, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигун, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, Д. В. Горбачев, А. Г. Бабенко, В. В. Арестов, П. Ю. Глазырина и многие другие; см. монографии [2–6], работы [9, 10, 27–36] и приведенную там библиографию.

В качестве вспомогательного, однако, представляющего и самостоятельный интерес, будет рассматриваться неравенство

$$|p(1)| \le D_n \, \|p\|_{L_q^\alpha}, \qquad p \in \mathscr{P}_n, \tag{1.4}$$

Nik-ineq-alph

с наилучшей константой $D_n = D(n, \phi^{(\alpha)})_q$. Ясно, что $D_n \le M_n$; как будет показано ниже, на самом деле, по крайней мере, при $\alpha \ge -1/2$, имеет место равенство $D_n = M_n$.

Цель данной работы состоит в исследовании свойств экстремальных многочленов неравенств (1.3) и (1.4), т. е. многочленов $\rho_n \in \mathscr{P}_n$, $\rho_n \not\equiv 0$, на которых эти неравенства обращаются в равенства. В частности, будет изучаться свойство единственности экстремальных многочленов. Ясно, что если многочлен ρ_n экстремальный, то многочлен $c\rho_n$ для любой константы $c \ne 0$ также экстремальный. Если ρ_n – экстремальный многочлен неравенства (1.4) и любой другой экстремальный имеет вид $c\rho_n$, $c \ne 0$, то будем говорить, что ρ_n – *единственный* экстремальный многочлен (1.4). Поскольку вес (1.2) четный, то вместе с многочленом $\rho_n(x)$ многочлен $\rho_n(-x)$ также будет экстремальным в (1.3). В связи с этим экстремальный многочлен ρ_n будем называть *единственным экстремальным* в (1.3), если любой другой экстремальный многочлен имеет вид $c\rho_n(\pm x)$, $c \ne 0$.

1.2. Многочлены, наименее уклоняющихся от нуля

Для веса

$$\psi(x) = \phi(x)(1-x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^\alpha,$$

параметра q, $1 \le q < \infty$, и целого $n \ge 1$ обозначим через $\varrho_n = \varrho_{n,\psi,q}$ многочлен порядка n с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве L_q^ψ, т. е. многочлен $\varrho_n = \varrho_{n,\psi,q}$, являющийся решением задачи

$$\min\{\|p_n\|_{L_q^\psi} : p_n \in \mathscr{P}_n^1\} = \|\varrho_n\|_{L_q^\psi}, \tag{1.5}$$

ukl0-alpha

где $\mathscr{P}_n^1$ есть множество многочленов $p_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ степени n, старший коэффициент которых равен 1.

Решение задачи (1.5) при $q = 2$ хорошо известно, а именно, в этом случае решением будет многочлен Якоби $R_n^{(\alpha+1,\alpha)}$ порядка n, поделенный на его старший коэффициент; см. детали в следующем параграфе. В случае $q = 1$ задача (1.5) сводится к исследованию системы n полиномиальных уравнений от n переменных, которую, по крайней мере, для малых n удается решить непосредственно или с помощью построения базиса Гребнера; см., к примеру, [38, п. 3.3].

1.3. Основной результат

Основным в данной работе является следующее утверждение.

⟨2015-thm1⟩ **Теорема 1.** *При $\alpha \ge -1/2$, $1 \le q < \infty$, $n \ge 1$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Наилучшие константы в неравенствах* (1.3) *и* (1.4) *совпадают*:

$$M_n(\phi^{(\alpha)})_q = D_n(\phi^{(\alpha)})_q. \tag{1.6}$$

egal-const-al

2. *Многочлен ϱ_n, наименее уклоняющийся от нуля относительно нормы пространства L_q^ψ является единственным экстремальным многочленом неравенства* (1.4).

3. *Многочлен ϱ_n является экстремальным многочленом и неравенства* (1.3). *В случае $\alpha > -1/2$ этот экстремальный многочлен единственный.*

Теорема 1 сводит проблему исследования неравенства (1.3) к существенно более простой, по нашему мнению, задаче (1.5).

Для значения параметра

$$\alpha = \frac{m-3}{2}, \qquad m - \text{целое}, \quad m \ge 3, \tag{1.7}$$

alpha-m

утверждение теоремы доказано в работе авторов [37] параллельно с изучением неравенства Никольского между равномерной нормой и L_q-нормой алгебраических многочленов на единичной сфере евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, $m \ge 3$. При $q = 1$ для значений (1.7) параметра α утверждение теоремы (без обсуждения свойств единственности экстремального многочлена в неравенстве (1.3)) доказано еще ранее в [38].

В этой тематике случай $\alpha = -1/2$ является особым. Вес $\phi(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ называют весом Чебышева. Неравенство (1.3) для веса Чебышева можно переписать в виде классического неравенства Никольского на множестве $\mathscr{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка (не выше) n. Обозначим через $\widetilde{L}_q$, $1 \le q < \infty$, пространство 2π-периодических измеримых вещественнозначных функций F таких, что функция $|F|^q$ суммируема на $(-\pi, \pi)$; это пространство является банаховым относительно нормы

$$\|F\|_{\widetilde{L}_q} = \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |F(\eta)|^q \, d\eta \right)^{1/q}. \tag{1.8}$$

period-LqR-n

Для функции $f \in L_q^{-1/2}$ имеем

$$\|f\|_{L_q^{-1/2}} = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^q (1-x^2)^{-1/2} dx \right)^{1/q} = \left(\int_{0}^{\pi} |f(\cos\eta)|^q d\eta \right)^{1/q}. \tag{1.9}$$

segm-period-

Формула $F(\eta) = f(\cos\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}$, устанавливает биекцию между пространством $L_q^{-1/2}$ и подпространством четных функций из $\widetilde{L}_q$, при этом в силу (1.9) имеет место равенство $\|f\|_{L_q^{-1/2}} = (\pi/2)^{1/q} \|F\|_{\widetilde{L}_q}$. Наряду с $\widetilde{L}_q$ рассмотрим пространство $C_{2\pi}$ непрерывных на всей числовой оси 2π-периодических функций с равномерной нормой. Обозначим через $\widetilde{M}(n) = \widetilde{M}(n)_q$ наилучшую (наименьшую возможную) константу в неравенстве

$$\|F_n\|_{C_{2\pi}} \le \widetilde{M}(n)_q \|F_n\|_{\widetilde{L}_q}, \qquad F_n \in \mathscr{T}_n, \tag{1.10}$$

Nik-Ineq-Tn

на множестве тригонометрических полиномов заданного порядка $n \ge 1$. Очевидно, наилучшие константы в (1.3) для веса Чебышева и (1.10) связаны неравенством $M\left(n, \phi^{(-1/2)}\right)_q \le (2/\pi)^{1/q} \widetilde{M}(n)_q$. На самом деле, как нетрудно показать, имеет место равенство

$$M\left(n, \phi^{(-1/2)}\right)_q = (2/\pi)^{1/q} \, \widetilde{M}(n)_q.$$

В настоящее время имеется небольшое число результатов относительно точных неравенств (1.1), (1.3), (1.10). Неравенство (1.10), вероятно, впервые изучал Д. Джексон [20]. В настоящее время наиболее полно исследован случай $q = 1$. С. Б. Стечкин показал (см. [21; 22]), что для величины $\widetilde{M}(n) = \widetilde{M}(n)_1$ существует конечный предел $c = \lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{M}(n)/n$. Л. В. Тайков [21] (см. также [22]) получил для величины c близкие между собой оценки сверху и снизу. Лучшие на данный момент результаты относительно константы $\widetilde{M}(n)$ получены в работах В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанова, С. А. Пичугова [23] и Д. В. Горбачева [24] (см. также [25]); Д. В. Горбачев, помимо того, установил [24; 25] связь этой задачи с другими экстремальными задачами теории функций.

A. Lupas [26] получил, в частности, точное неравенство (1.1) (т.е. нашел значение наилучшей константы и выписал экстремальный многочлен) при $q = 2$ для веса Якоби $\upsilon(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ со значениями переметров $\alpha, \beta \ge -1/2$.

P.Yu.Glazyrina и I.E.Simonov [19] в неравенстве (1.3) для веса Чебышева при $q = 1$ построили экстремальный многочлен (в виде линейной комбинации многочленов Чебышева первого рода), доказали его единственность и показали, что его равномерная норма достигается в концевой точке отрезка $[-1, 1]$.

Отметим, что наш метод исследования не позволяет доказать единственность экстремального многочлена ϱ_n в неравенстве (1.3) при $\alpha = -1/2$, т.е. для веса Чебышева.

2. Поточечное неравенство Никольского для алгебраических многочленов на отрезке

Целью данного параграфа является изучение аналога неравенства (1.4)

$$|p_n(1)| \le D(n, \upsilon)_q \|p_n\|_{L_q^\upsilon}, \qquad p_n \in \mathscr{P}_n, \tag{2.1}$$

Nik-ineq-ups

для произвольного веса.

2.1. Поточечное неравенство Никольского на отрезке с произвольным весом

Наряду с неравенством (2.1) представляют интерес более общее поточечное неравенство

$$|p_n(z)| \le D(n, \upsilon, z)_q \|p_n\|_{L_q^\upsilon}, \qquad p_n \in \mathscr{P}_n, \tag{2.2}$$

Nik-ineq-ups

для $z \in \mathbb{C}$. К настоящему времени неравенствам (2.2) и (1.1) посвящено большое число исследований, см. монографии [4, § 6.1; 3, гл. 4; 8, § 7.71].

Наиболее полно неравенства (2.2) и (1.1) исследованы при $q = 2$; см. [7, Т. II, отд. VI, § 12; 8, § 7.71]. Пусть $\{p_n^\upsilon\}_{n=0}^\infty$ есть система многочленов, ортонормированная с весом υ на $(-1, 1)$. Тогда при $z \in [-1, 1]$ для квадрата наилучшей константы в (2.2) при $q = 2$ имеет место формула (см., к примеру, [8, § 3.1, теорема 3.1.3])

$$(D(n, \upsilon, z)_2)^2 = \sum_{k=0}^{n} (p_k^\upsilon(z))^2 \tag{2.3}$$

ivolga-3

и многочлен

$$\rho_n(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k^{\upsilon}(z) p_k^{\upsilon}(x) \tag{2.4}$$ ivolga-4

является экстремальным. Как следствие (2.3), справедлива формула

$$(D(n,\upsilon)_2)^2 = \max\left\{\sum_{k=0}^{n} (p_k^{\upsilon}(z))^2 : z \in [-1,1]\right\}. \tag{2.5}$$ larino-5

Многочлены Якоби $\{p_n^{(\alpha,\beta)}\}$, ортонормированные на $(-1,1)$ с весом Якоби

$$\phi^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \tag{2.6}$$ ad-ves-J

при $\alpha \ge \beta \ge -1/2$ обладают свойством (см., например, [8, § 7.32, теорема 7.32.1; § 4.1, формула (4.1.1)])

$$\max\{|p_k^{(\alpha,\beta)}(x)| : \ x \in [-1,1]\} = |p_k^{(\alpha,\beta)}(1)|, \qquad k \ge 0.$$

Отсюда в силу (2.5) и (2.3) следует, что для веса Якоби (2.6) при $\alpha \ge \beta \ge -1/2$, $q = 2$ константы в неравенствах (1.1) и (2.1) совпадают:

$$M\left(n, \phi^{(\alpha,\beta)}\right)_2 = D\left(n, \phi^{(\alpha,\beta)}\right)_2$$

и квадрат их общего значения равен величине (см., например, [7, Т. II, отд. VI, § 12, теорема 105]

$$\frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\beta+1)}.$$

Экстремальным в неравенствах (2.1) и (1.1) при $q = 2$ для веса Якоби (2.6) со значениями параметров $\alpha \ge \beta \ge -1/2$ является многочлен (см. (2.4))

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^{(\alpha,\beta)}(1) p_k^{(\alpha,\beta)}(x). \tag{2.7}$$ ivolga-61

Сформулированные только что результаты для веса Якоби (2.6) содержатся в работе [26]; они приведены здесь с целью иллюстрации общего факта (2.5), а кроме того, последующего обсуждения.

Многочлен (2.7) с точностью до мультипликативной константы совпадает [8, § 4.5, формулы (4.5.2), (4.5.3)] с многочленом Якоби $p_n^{(\alpha+1,\beta)}$, соответствующим весу $\phi^{(\alpha+1,\beta)}(x) = (1-x)\,\phi^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta}$. Хорошо известно, что многочлен $p_n^{(\alpha+1,\beta)}$, поделенный на свой старший коэффициент, наименее уклоняется от нуля в пространстве L_2^{υ} с весом $\upsilon = \phi^{(\alpha+1,\beta)}$. Этот факт и результаты работы [26] содержат, в частности, утверждения теоремы 1 при $q = 2$. Для обоснования теоремы 1 при $q \ne 2$ будут использоваться другие соображения.

2.2. Характеризация экстремального многочлена неравенства (2.1)

Исходя из веса υ, определим на интервале $(-1,1)$ вес

$$w(x) = (1-x)\upsilon(x). \tag{2.8}$$ ves-w-upsilor

Обозначим через $\varrho_n = \varrho_{n,w,q}$ многочлен порядка $n \ge 1$ с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве L_q^w; этот многочлен является решением задачи

$$\min\{\|p_n\|_{L_q^w} : p_n \in \mathscr{P}_n^1\} = \|\varrho_n\|_{L_q^w}. \tag{2.9}$$ ukl0-upsilin

Многочлен ϱ_n характеризуется свойством ортогональности функции $|\varrho_n|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n$ пространству $\mathscr{P}_{n-1}$ (см., например, [39, гл. 3, § 3.3, теоремы 3.3.1, 3.3.2]):

$$\int_{-1}^{1} w(x)\, p_{n-1}(x) |\varrho_n(x)|^{q-1} \operatorname{sign}\varrho_n(x)\, dx = 0, \qquad p_{n-1} \in \mathscr{P}_{n-1}. \tag{2.10}$$ extr-Lq-upsil

Отсюда, в частности, легко следует, что все n нулей многочлена ϱ_n простые и лежат на интервале $(-1,1)$.

В соответствии со следующей теоремой, задачи (2.9) и (2.1) имеют одно и то же решение. Для $q = 1$ это утверждение доказано в [38]. Для произвольного q, $1 \le q < \infty$, оно доказано в работе [37]. Для полноты изложения мы приводим здесь это утверждение с доказательством.

⟨2015-thm2⟩ **Теорема 2.** *При $1 \le q < \infty$, $n \ge 1$ многочлен ϱ_n порядка n с единичным старшим коэффициентом, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве L_q^w с весом* (2.8), *является единственным экстремальным многочленом неравенства* (2.1).

Доказательство. Пусть ϱ_n есть многочлен порядка n, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве L_q^w. Для произвольного многочлена $p_n \in \mathscr{P}_n$ имеем

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)\,\upsilon(x)|\varrho_n(x)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} r_{n-1}(x)(1-x)\upsilon(x)|\varrho_n(x)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(x)dx + p_n(1)\int_{-1}^{1}\upsilon(x)|\varrho_n(x)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(x)dx,$$

где

$$r_{n-1}(x) = \frac{p_n(x)-p_n(1)}{1-x}$$

есть многочлен порядка $n-1$. Отсюда в силу (2.10) следует равенство

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)\upsilon(x)|\varrho_n(x)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(x)dx =$$

$$= p_n(1)\int_{-1}^{1}\upsilon(x)|\varrho_n(x)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(x)dx. \tag{2.11}$$ a4-6

Выясним знак интеграла

$$I(n,q) = \int_{-1}^{1}\upsilon(x)|\varrho_n(x)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(x)dx.$$

Подставив в (2.11) многочлен $p_n = \varrho_n$, получаем равенство

$$\int_{-1}^{1}\upsilon(x)|\varrho_n(x)|^{q}dx = \varrho_n(1)\int_{-1}^{1}\upsilon(x)|\varrho_n(x)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(x)dx. \tag{2.12}$$ a4-7

Все нули многочлена ϱ_n лежат на интервале $(-1,1)$ и его старший коэффициент положительный, поэтому $\varrho_n(1)>0$. В силу (2.12) можно утверждать, что имеет место свойство

$$I(n,q) = \int_{-1}^{1}\upsilon(x)|\varrho_n(x)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(x)\,dx > 0.$$

Соотношение (2.11) можно теперь переписать в виде

$$p_n(1) = \frac{1}{I(n,q)}\int_{-1}^{1}\upsilon(x)p_n(x)|\varrho_n(x)|^{q-1}\operatorname{sign}\varrho_n(x)dx, \qquad p_n\in\mathscr{P}_n. \tag{2.13}$$ a4-71

С помощью неравенства Гельдера из (2.13) получаем для произвольного $p_n\in\mathscr{P}_n$ оценку

$$|p_n(1)| \le \frac{1}{I(n,q)}\left(\int_{-1}^{1}\upsilon(x)|p_n(x)|^{q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{-1}^{1}\upsilon(x)|\varrho_n(x)|^{q}dx\right)^{\frac{q-1}{q}}. \tag{2.14}$$ a4-72

На многочлене ϱ_n неравенство (2.14) обращается в равенство; в этом легко убедиться, к примеру, с помощью тождества (2.13). Следовательно, неравенство (2.14) и есть неравенство (2.1), причем

$$D(n,\upsilon)_q = \frac{\left(\|\varrho_n\|_{L_q^\upsilon}\right)^{q-1}}{I(n,q)}.$$

Исходя из условий, при которых неравенство Гельдера обращается в равенство, нетрудно сделать вывод, что при всех $q,\ 1\le q<\infty$, неравенство (2.14) обращается в равенство лишь на многочленах $c\varrho_n,\ c\in\mathbb{R}$. Таким образом, многочлен ϱ_n является единственным экстремальным в неравенстве (2.1). Теорема 2 доказана. □

3. Оператор обобщенного сдвига

В дальнейшем, при обосновании теоремы 1 важную роль играет оператор обобщенного сдвига. Большую часть нужной нам информации относительно истории его возникновения, свойств и применении в теории функций можно найти в [40].

3.1. Основные определения и простейшие факты

При $1 \le q < \infty,\ \alpha > -1$ обозначим через $\mathcal{L}_q^\alpha = \mathcal{L}_q^\alpha(-1,1)$ пространство измеримых на $(-1,1)$ комплекснозначных функций f таких, что функция $|f|^q$ суммируема на $(-1,1)$ с ультрасферическим весом (1.2); это пространство является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_{\mathcal{L}_q^\alpha} = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^q (1-x^2)^\alpha \, dx. \right)^{1/q}.$$

В предельном случае $q = \infty$ считаем, что $\mathcal{L}_q^\alpha$ есть классическое пространство $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(-1,1)$ измеримых, существенно ограниченных на $(-1,1)$ (комплекснозначных) функций с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{L}_\infty} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| : \ x \in (-1,1)\}.$$

Пространство $\mathcal{L}_2^\alpha$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(f,g) = (f,g)_{\mathcal{L}_2^\alpha} = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}(1-x^2)^\alpha dx, \qquad f,g \in \mathcal{L}_2^\alpha. \tag{3.1}$$ scal-prod

Пусть $R_\nu = R_\nu^\alpha,\ \nu \ge 0$, есть система алгебраических ультрасферических многочленов степени ν, ортогональных на отрезке $[-1,1]$ с весом (1.2), а точнее, ортогональных относительно скалярного произведения (3.1) и нормированных условием $R_\nu(1) = 1,\ \nu \ge 0$, (см., например, [8, гл.IV]). Эти многочлены удовлетворяют рекуррентному соотношению (см., например, [8, гл.IV, § 4.1, 4.5], [42, гл. VII, §1])

$$R_{\nu+1}(z) = \frac{(2\nu+2\alpha+1)}{(\nu+2\alpha+1)} z R_\nu(z) - \frac{\nu}{(\nu+2\alpha+1)} R_{\nu-1}(z), \qquad \nu \ge 1,$$

$$R_0(z) = 1, \qquad R_1(z) = z.$$

Отметим на будущее, что в случае $\alpha \ge -1/2$ ультрасферические многочлены $R_\nu = R_\nu^\alpha$ удовлетворяют соотношению (см., например, [8, гл. VII, §7.32, теорема 7.32.1], [42, гл. VII, §2, теорема 7.1])

$$\max\{|R_\nu(x)| \colon x \in [-1,1]\} = R_\nu(1) = 1, \qquad \nu \ge 0. \tag{3.2}$$ ultra-pol-seg

В случае же $\alpha > -1/2$ при $\nu \ge 1$ можно дополнительно к (3.2) утверждать, что (см., например, [8, §§ 4.2, 7.31, 7.32])

$$|R_\nu(x)| < R_\nu(1) = 1, \qquad x \in (-1,1). \tag{3.3}$$ ultra-pol-poi

Система ультрасферических многочленов $\{R_\nu\}_{\nu \ge 0}$ образует ортогональный базис в пространстве $\mathcal{L}_2^\alpha$. Так что, произвольная функция $f \in \mathcal{L}_2^\alpha$ разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu R_\nu(x), \qquad f_\nu = \frac{(f, R_\nu)}{(R_\nu, R_\nu)}. \tag{3.4}$$ Fourier-seri

Для пары функций $f, g \in \mathcal{L}_2^\alpha$ имеет место обобщенный вариант равенства Парсеваля

$$(f,g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu f_\nu \overline{g}_\nu, \qquad \delta_\nu = (R_\nu, R_\nu) = \|R_\nu\|^2_{\mathcal{L}_2^\alpha}. \tag{3.5}$$ Parseval-gene

В частности, норма функции $f \in \mathcal{L}_2^\alpha$ выражается через ее коэффициенты Фурье $\{f_\nu\}$ равенством Парсеваля

$$\|f\|^2_{\mathcal{L}_2^\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu \, |f_\nu|^2. \tag{3.6}$$ Parseval

Оператором обобщенного сдвига с шагом $t \in [-1,1]$ называется линейный оператор Θ_t, который определен на функциях $f \in \mathcal{L}_2^\alpha$ с рядом Фурье (3.4) соотношением (см., к примеру, [40, формула (0.5)] и приведенную в [40] библ.)

$$\Theta_t f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu R_\nu(t) R_\nu(x). \tag{3.7}$$ transl-def

?⟨norm-L2⟩? **Лемма 1.** *Справедливы следующие два утверждения.*

1) *При $\alpha \ge -1/2$ для любого $t \in [-1,1]$ оператор обобщенного сдвига Θ_t является линейным ограниченным оператором в пространстве $\mathcal{L}_2^\alpha$ и имеет единичную норму*:

$$\|\Theta_t\|_{\mathcal{L}_2^\alpha \to \mathcal{L}_2^\alpha} = 1. \tag{3.8}$$ transl-norm-l

2) *При $\alpha > -1/2,\ t \in (-1,1)$ норма оператора Θ_t в пространстве $\mathcal{L}_2^\alpha$ достигается лишь на функциях, совпадающих с некоторой константой почти всюду на $(-1,1)$.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{L}_2^\alpha$. В силу свойства (3.2) правая часть (3.7) является функцией из $\mathcal{L}_2^\alpha$. Более того, используя равенство Парсеваля (3.6), заключаем, что

$$\|\Theta_t f\|^2_{\mathcal{L}_2^\alpha} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu \, |R_\nu(t)|^2 |f_\nu|^2 \le \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu \, |f_\nu|^2 = \|f\|^2_{\mathcal{L}_2^\alpha}. \tag{3.9}$$

Таким образом, в случае $\alpha \ge -1/2$ при любом $t \in [-1,1]$ норма оператора обобщенного сдвига Θ_t в пространстве $\mathcal{L}_2^\alpha$ не превосходит 1. Поскольку $R_0(t) \equiv 1$, то оператор сдвига (с любым фиксированным шагом $t \in \mathbb{R}$) переводит постоянные функции в себя. Отсюда следует равенство (3.8).

Если $\alpha > -1/2$ и $t \in (-1,1)$, то в силу (3.3), равенство в неравенстве (3.9) имеет место в том и только том случае, если у функции f зануляются все коэффициенты Фурье f_ν с номерами $\nu \ge 1$. Но это и означает, что f есть константа. Доказательство леммы завершено. □

Отметим еще, что для любой пары функций $f, g \in \mathcal{L}_2^\alpha$ и любого $t \in [-1,1]$ в силу (3.5) и (3.7) имеем

$$(\Theta_t f, g) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \delta_\nu f_\nu \overline{g}_\nu R_\nu(t) = (f, \Theta_t g);$$

таким образом, выполняется равенство

$$(\Theta_t f, g) = (f, \Theta_t g), \qquad f, g \in \mathcal{L}_2^\alpha, \tag{3.10}$$

которое означает, что оператор Θ_t самосопряженный.

3.2. Интегральное представление обобщенного сдвига

В дальнейших рассуждениях будет использоваться интегральное представление обобщенного сдвига. Оно основано на так называемой формуле умножения для ультрасферических многочленов. В классической тригонометрической форме формула умножения состоит в том, что для целого $\nu \ge 0$ при $\alpha > -1/2$ для произвольных вещественных θ, η имеет место равенство (см., например, [40, формула (5.1)], [41, гл. XI, §11.5])

$$R_\nu(\cos\theta) R_\nu(\cos\eta) = \frac{1}{\kappa(\alpha)} \int_0^\pi R_\nu(\cos\theta\, \cos\eta + \sin\theta\, \sin\eta\, \cos\zeta)(\sin\zeta)^{2\alpha} d\zeta, \tag{3.11}$$

в котором

$$\kappa(\alpha) = \int_0^\pi (\sin\zeta)^{2\alpha} d\zeta = \int_{-1}^1 \left(1 - \xi^2\right)^{\alpha - 1/2} d\xi = \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Введем обозначения $t = \cos\theta$, $x = \cos\zeta$ и перейдем в (3.11) к новой переменной интегрирования $\xi = \cos\zeta$. В результате получим эквивалентную (3.11) формулу

$$R_\nu(t) R_\nu(x) = \frac{1}{\kappa(\alpha)} \int_{-1}^1 R_\nu\left(tx + \xi\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x^2}\right) \left(1-\xi^2\right)^{\alpha-1/2} d\xi \tag{3.12}$$

со значениями параметров $\alpha > -1/2$, $-1 \le t, x \le 1$.

Подставив формулы (3.12) в определение (3.7) оператора обобщенного сдвига Θ_t, получаем для него при $\alpha > -1/2$ интегральное представление

$$\Theta_t f(x) = \frac{1}{\kappa(\alpha)} \int_{-1}^1 f\left(tx + \xi\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x^2}\right) \left(1-\xi^2\right)^{\alpha-1/2} d\xi, \tag{3.13}$$

по крайней мере, на множестве $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\mathbb{C})$ всех алгебраических многочленов с комплексными коэффициентами.

3.3. Норма оператора обобщенного сдвига; случай $\alpha > -1/2$

В этом параграфе будет найдена норма оператора обобщенного сдвига в пространствах $\mathcal{L}_q^\alpha$, $1 \le q < \infty$, $\alpha > -1/2$. Конечно, представляет интерес описание множества функций $f \in \mathcal{L}_q^\alpha$, на которых достигается норма оператора Θ_t; такие функции будут в дальнейшем называться экстремальными. Значения $t = \pm 1$ не представляют интереса, поскольку оператор Θ_1 есть единичный оператор, а для оператора Θ_{-1} имеет место формула $(\Theta_{-1} f)(x) = f(-x)$; при этих двух значениях параметра t любая функция из $\mathcal{L}_q^\alpha$ будет экстремальной. В случае $|t| < 1$ мы ограничимся исследованием лишь экстремальных функций, являющихся многочленами. Это существенно сократит и упростит рассуждения, однако, будет достаточно для исследования основной задачи данной статьи.

В дальнейшем относительно (комплекснозначной) функции f, определенной и измеримой на измеримом множестве $G \subset \mathbb{R}$, будем говорить, что она сохраняет знак на G, если существует число $\zeta \in \mathbb{C}$, $|\zeta| = 1$, такое, что $\zeta f \ge 0$ почти всюду на G; в этом случае число $\overline{\zeta}$ будем называть знаком функции f на G.

Следующие утверждение является основным в данном параграфе.

⟨2015-thm3⟩ **Теорема 3.** *При $\alpha > -1/2$, $1 \le q < \infty$ и любом $t \in [-1,1]$ справедливы следующие утверждения.*

1) *Оператор обобщенного сдвига Θ_t является линейным ограниченным оператором в пространстве $\mathcal{L}_q^\alpha$ и имеет единичную норму:*

$$\|\Theta_t\|_{\mathcal{L}_q^\alpha \to \mathcal{L}_q^\alpha} = 1. \tag{3.14}$$ transl-norm-l

2) *При $\alpha > -1/2$, $1 < q < \infty$, $|t| < 1$ норма оператора Θ_t достигается на многочлене f в том и только том случае, если f есть константа.*

3) *При $t \in (-1,1)$ норма оператора Θ_t в пространстве $\mathcal{L}_1^\alpha$ достигается на многочлене f в том и только том случае, если f сохраняет знак на $[-1,1]$.*

Поскольку оператор (3.13) переводит постоянные функции в себя, то для доказательства равенства (3.14) достаточно обосновать неравенство

$$\|\Theta_t\|_{\mathcal{L}_q^\alpha \to \mathcal{L}_q^\alpha} \le 1. \tag{3.15}$$ norm-Lq-estim

Дальнейшие рассуждения будут осуществлены в несколько этапов. Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{C}[-1,1]$ есть пространство непрерывных (комплекснозначных) функций на отрезке $[-1,1]$ с равномерной нормой.

⟨norm-C⟩ **Лемма 2.** *Для $\alpha > -1/2$ при любом $t \in [-1,1]$ оператор обобщенного сдвига Θ_t является линейным ограниченным оператором в пространстве $\mathcal{C}$ и имеет единичную норму.*

Доказательство. Правая часть формулы (3.13), очевидно, является линейным ограниченным оператором в пространстве $\mathcal{C}$, норма которого равна 1. На множестве $\mathscr{P}$ алгебраических многочленов имеет место формула (3.13). Множество $\mathscr{P}$ плотно в пространстве $\mathcal{C}$. Отсюда нетрудно сделать вывод, что оператор Θ_t продолжается по непрерывности до ограниченного оператора с множества $\mathscr{P}$ на все пространство $\mathcal{C}$ и продолжение осуществляется именно формулой (3.13). Лемма доказана. □

При $\alpha > -1/2$ для $f \in \mathcal{C}$ в силу (3.13) справедливо поточечное неравенство

$$|(\Theta_t f)(x)| \le (\Theta_t|f|)(x), \qquad x \in [-1,1]. \tag{3.16}$$ transl-point-

Ясно, что если функция f к тому же сохраняет знак на $[-1,1]$, то (3.16) обращается в равенство.

⟨2015-znak⟩ **Лемма 3.** *Пусть $\alpha > -1/2$, $|t| < 1$. Тогда на многочлене $f \not\equiv 0$ неравенство (3.16) для всех $x \in (-1,1)$ обращается в равенство в том и только том случае, если f сохраняет знак на $(-1,1)$.*

Доказательство. Для фиксированного $x \in (-1,1)$ неравенство (3.16) обращается в равенство в том и только том случае, если функция $f(tx + \xi\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x^2})$ переменного $\xi \in (-1,1)$ имеет постоянный знак. А этот факт означает, что многочлен f сохраняет знак на интервале

$$I(x,t) = \left(tx - \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x^2},\ tx + \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x^2}\right).$$

Убедимся, что интервалы $I(x,t)$, $x \in (-1,1)$, покрывают интервал $(-1,1)$. Для $x \in (-1,1)$ центры $c(x,t) = tx$ интервалов $I(x,t)$ заполняют интервал $(-|t|,|t|)$. Далее, имеем

$$I(t,t) = \left(2t^2-1,\ 1\right), \qquad c(t,t) = t^2;$$

$$I(-t,t) = \left(-1,\ 1-2t^2\right), \qquad c(-t,t) = -t^2.$$

Поскольку $t^2 < |t|$, то отсюда, действительно, следует, что $(-1,1) \subset \cup\{I(x,t)\colon x \in (-1,1)\}$.

Пусть ρ – произвольное положительное число, удовлетворяющее условию $|t| < \rho < 1$. Имеем

$$[-\rho,\rho] \subset \cup\{I(x,t)\colon x \in (-1,1)\}.$$

Отрезок $[-\rho,\rho]$ компактен, поэтому его можно покрыть конечной системой интервалов $I(x,t)$. Многочлен f не может зануляться на каком-либо интервале, поэтому если два интервала $I(x',t)$, $I(x'',t)$ пересекаются, то на объединении этих интервалов многочлен f также знакопостоянен. Отсюда нетрудно сделать вывод, что многочлен f сохраняет знак на отрезке $[-\rho,\rho]$. А это влечет тот факт, что f сохраняет знак на интервале $(-1,1)$. Лемма доказана. □

⟨norm-L1⟩ **Лемма 4.** *При $\alpha > -1/2$, $q = 1$ справедливы следующие три утверждения.*

1) *При любом $t \in [-1,1]$ оператор обобщенного сдвига Θ_t является линейным ограниченным оператором в пространстве $\mathcal{L}_1^\alpha$ и имеет единичную норму:*

$$\|\Theta_t\|_{\mathcal{L}_1^\alpha \to \mathcal{L}_1^\alpha} = 1; \tag{3.17}$$ transl-norm-l

на функциях из $\mathcal{L}_1^\alpha$, знак которых сохраняется на $(-1,1)$, норма оператора достигается.

2) *При любом $t \in [-1,1]$ для оператора обобщенного сдвига Θ_t на пространстве $\mathcal{L}_1^\alpha$ имеет место формула*

$$\int_{-1}^{1} (\Theta_t f)(x)\left(1-x^2\right)^\alpha dx = \int_{-1}^{1} f(x)\left(1-x^2\right)^\alpha dx, \qquad f \in \mathcal{L}_1^\alpha. \tag{3.18}$$ transl-tchude

3) *При $t \in (-1,1)$ норма оператора в пространстве $\mathcal{L}_1^\alpha$ достигается на многочлене f в том и только том случае, если f сохраняет знак на $[-1,1]$.*

Доказательство. Для пары функций $g \in \mathcal{C}$, $f \in \mathscr{P}$ справедливо равенство (3.10). С помощью этого равенства и леммы 2 получаем

$$|(\Theta_t f, g)| = |(f, \Theta_t g)| \le \|f\|_{\mathcal{L}_1^\alpha} \|\Theta_t g\|_{\mathcal{C}} \le \|f\|_{\mathcal{L}_1^\alpha} \|g\|_{\mathcal{C}}.$$

Следовательно, для любого многочлена f справедливо неравенство $\|\Theta_t f\|_{\mathcal{L}_1^\alpha} \le \|f\|_{\mathcal{L}_1^\alpha}$. Множество $\mathscr{P}$ плотно в пространстве $\mathcal{L}_1^\alpha$, поэтому оператор Θ_t продолжается по непрерывности до линейного ограниченного оператора в пространстве $\mathcal{L}_1^\alpha$ и норма продолжения не превосходит 1; так что неравенство (3.15) выполняется при $q = 1$, а значит, имеет место (3.17).

Приведенные рассуждения позволяют также утверждать, что формула (3.10) справедлива для произвольной пары функций $g \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{L}_1^\alpha$. Пусть $f \in \mathcal{L}_1^\alpha$, а g есть конкретная функция, тождественно равная 1. В соответствии с формулами (3.7) и (3.4), имеем $\Theta_t g = g_0 = 1$. Поэтому равенство (3.10) в данном случае совпадает с (3.18).

Формула (3.18), в частности, показывает, что на функциях из $\mathcal{L}_1^\alpha$, знак которых сохраняется на $(-1,1)$, достигается норма оператора Θ_t в $\mathcal{L}_1^\alpha$. Покажем, что любой экстремальный многочлен обладает таким свойством.

Убедимся, что для любой функции $f \in \mathcal{L}_1^\alpha$ имеет место неравенство

$$\int_{-1}^{1} |(\Theta_t f)(x)| \left(1 - x^2\right)^\alpha dx \le \int_{-1}^{1} (\Theta_t |f|)(x) \left(1 - x^2\right)^\alpha dx. \tag{3.19}$$

transl-estim

Действительно, если $f \in \mathcal{C}$, то имеет место поточечное неравенство (3.16), а значит и неравенство (3.19). Отсюда, исходя из того факта, что $\mathcal{C}$ плотно в $\mathcal{L}_1^\alpha$, заключаем, что неравенство (3.19) выполняется и в пространстве $\mathcal{L}_1^\alpha$. Объединяя неравенство (3.19) для функции $f \in \mathcal{L}_1^\alpha$ и равенство (3.18) для функции $|f|$, получаем

$$\|\Theta_t f\|_{\mathcal{L}_1^\alpha} = \int_{-1}^{1} |(\Theta_t f)(x)| \left(1 - x^2\right)^\alpha dx \le \int_{-1}^{1} (\Theta_t |f|)(x) \left(1 - x^2\right)^\alpha dx \tag{3.20}$$

transl-estim

$$= \int_{-1}^{1} |f(x)| \left(1 - x^2\right)^\alpha dx = \|f\|_{\mathcal{L}_1^\alpha}.$$

Мы вновь пришли к неравенству

$$\|\Theta_t f\|_{\mathcal{L}_1^\alpha} \le \|f\|_{\mathcal{L}_1^\alpha}$$

в пространстве $\mathcal{L}_1^\alpha$. Для того чтобы на функции $f \in \mathcal{L}_1^\alpha$ это неравенство обратилось в равенство, необходимо и достаточно, чтобы на функции f обратилось в равенство неравенство (3.19), а это эквивалентно тому, что неравенство (3.20) почти для всех $x \in (-1,1)$ обратится в равенство.

Из этих рассуждений видно, что многочлен f является экстремальным в том и только том случае, если на этом многочлене неравенство (3.16) обратится в равенство для всех $x \in [-1,1]$. Применяя лемму 3 получаем третье утверждение данной леммы. □

Лемма 5. *При $\alpha > -1/2$, $1 < q < \infty$, $t \in (-1,1)$ оператор обобщенного сдвига Θ_t является линейным ограниченным оператором в пространстве $\mathcal{L}_q^\alpha$ и имеет единичную норму: $\|\Theta_t\|_{\mathcal{L}_q^\alpha \to \mathcal{L}_q^\alpha} = 1$. На многочлене f норма оператора Θ_t достигается в том и только том случае, если f есть константа.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{C}$. При любом $x \in (-1,1)$, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|(\Theta_t f)(x)| = \left| \frac{1}{\kappa(\alpha)} \int_{-1}^{1} f\left(tx + \xi\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x^2}\right) \left(1-\xi^2\right)^{\alpha-1/2} d\xi \right|$$

$$\le \left(\frac{1}{\kappa(\alpha)} \int_{-1}^{1} \left| f\left(tx + \xi\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x^2}\right) \right|^q \left(1-\xi^2\right)^{\alpha-1/2} d\xi \right)^{1/q}. \tag{3.21}$$

transl-estim

Применяя последнюю оценку и равенство (3.18) для функции $|f|^q$, получаем

$$\|\Theta_t f\|_{\mathcal{L}_q^\alpha}^q \le \|\Theta_t(|f|^q)\|_{\mathcal{L}_1^\alpha} = \||f|^q\|_{\mathcal{L}_1^\alpha} = \|f\|_{\mathcal{L}_q^\alpha}^q.$$

Таким образом, для функций $f \in \mathcal{C}$ справедливо неравенство $\|\Theta_t f\|_{\mathcal{L}_q^\alpha} \le \|f\|_{\mathcal{L}_q^\alpha}$. Множество $\mathcal{C}$ плотно в пространстве L_q^α, поэтому Θ_t продолжается по непрерывности до линейного ограниченного оператора в пространстве $\mathcal{L}_q^\alpha$ и норма продолжения не превосходит 1; так что неравенство (3.15), а значит и равенство (3.17), выполняются и при $1 < q < \infty$.

Нам предстоит описать многочлены, на которых достигается норма оператора Θ_t, $|t| < 1$, в пространстве L_q^α, $1 < q < \infty$. Экстремальный многочлен f должен при любом $x \in [-1,1]$ обратить неравенство Гельдера в (3.21) в равенство. Для $x \in (-1,1)$ равенство в (3.21) достигается лишь в том случае, если полином f является константой на отрезке $\left[tx - \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x^2},\ tx + \sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x^2}\right]$, а значит, и на всем отрезке $[-1,1]$. Лемма 5 доказана. □

Утверждение теоремы 3 содержится в леммах 4 и 5.

3.4. Случай $\alpha = -1/2$

Обсудим свойства оператора (3.7) при $\alpha = -1/2$. В этом случае ультрасферические многочлены являются многочленами Чебышева первого рода:

$$R_\nu(x) = \cos(\nu \arccos x), \qquad \nu \ge 0, \qquad x \in [-1,1].$$

Положив в формуле (3.7) $x = \cos\zeta$, $\zeta \in [0,\pi]$, и $t = \cos h$, $h \in [0,\pi]$, получаем

$$T_{\cos h} f(\cos\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu \cos(\nu h)\cos(\nu\zeta) = \frac{1}{2}(F(\zeta+h) + F(\zeta-h)); \tag{3.22}$$ transl-segmen

здесь

$$F(\eta) = f(\cos\eta), \qquad \eta \in \mathbb{R}. \tag{3.23}$$ bejection

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{L}}_q$, $1 \le q < \infty$, пространство 2π-периодических измеримых комплекснозначных функций F таких, что функция $|F|^q$ суммируема на $(-\pi,\pi)$; это пространство является банаховым относительно нормы (1.8). Формула (3.23) устанавливает биекцию между пространством $\mathcal{L}_q^{-1/2}$ и подпространством четных функций из $\widetilde{\mathcal{L}}_q$, при этом имеет место уже обсуждавшееся выше равенство $\|f\|_{\mathcal{L}_q^{-1/2}} = (\pi/2)^{1/q}\,\|F\|_{\widetilde{\mathcal{L}}_q}$.

Исходя из формулы (3.22), определим в пространстве $\widetilde{\mathcal{L}}_q$, $1 \le q < \infty$, при $0 \le h \le \pi$ оператор $\widetilde{\Theta}_h$ формулой

$$(\widetilde{\Theta}_h F)(\eta) = \frac{1}{2}(F(\zeta+h) + F(\zeta-h)).$$

Очевидно, что для любого $h \in [0,\pi]$ оператор $\widetilde{\Theta}_h$ является линейным ограниченным оператором в пространстве $\widetilde{\mathcal{L}}_q$ при $1 \le q < \infty$ и его норма равна 1. Отсюда, в качестве следствия получаем такое утверждение.

⟨norm-Lq-Cheb⟩ **Лемма 6.** *При $\alpha = -1/2$, $1 \le q < \infty$ и любом $t \in [-1,1]$ оператор обобщенного сдвига Θ_t является линейным ограниченным оператором в пространстве $\mathcal{L}_q^{-1/2}$ и имеет единичную норму.*

В случае $\alpha = -1/2$ ситуация с многочленами, на которых достигается норма оператора Θ_t при $|t| < 1$, сложнее в сравнении с $\alpha > -1/2$. Мы этот вопрос здесь не обсуждаем, поскольку на этом пути не удается описать экстремальные многочлены неравенства (1.1) при $\alpha = -1/2$.

4. Доказательство теоремы 1

Для наилучших констант в неравенствах (1.1) и (1.4) справедливо неравенство $D_n \le M_n$. Покажем, что на самом деле они совпадают, т. е. имеем место (1.6). Воспользуемся оператором обобщенного сдвига (3.7). Пусть $f \in \mathscr{P}_n = \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ и равномерная норма f достигается в некоторой точке $t \in [-1,1]$. Из определения (3.7) видно, что функция $g(x) = (\Theta_t f)$ также является многочленом порядка n и обладает свойством $g(1) = f(t)$. Применяя неравенство (1.4), теорему 3 и лемму 6, получаем

$$\|f\|_C = |f(t)| = |g(1)| \le D_n \|g\|_{L_q^\alpha} \le D_n \|f\|_{L_q^\alpha}. \tag{4.1}$$ C-point-Lq

В силу произвольности $f \in \mathscr{P}_n$ отсюда следует неравенство $M_n \le D_n$. Равенство (1.6) проверено.

Напомним, что через ϱ_n обозначен многочлен, который дает решение задачи (1.5). В силу теоремы 2 он является единственным экстремальным в неравенстве (1.4). Имеем

$$D_n\,\|\varrho_n\|_{L_q^\phi} = |\varrho_n(1)| \le \|\varrho_n\|_C \le M_n\,\|\varrho_n\|_{L_q^\phi}.$$

Отсюда с учетом (1.6) следует, что

$$\|\varrho_n\|_C = |\varrho_n(1)|$$

и многочлен ϱ_n является экстремальным в неравенстве (1.1).

Нам осталось проверить, что если $\alpha > -1/2$, то ϱ_n – единственный экстремальный многочлен неравенства (1.1). Если экстремальный многочлен f_n неравенства (1.1) достигает равномерной нормы в одной из концевых точек ± 1 отрезка, то многочлен $f_n(\pm x)$ будет экстремальным в неравенстве (1.4). В силу теоремы 2 такой многочлен с точностью до мультипликативной константы совпадает с ϱ_n.

Убедимся, что любой экстремальный многочлен неравенства (1.1) не может достигать равномерной нормы на интервале $(-1,1)$. Будем рассуждать от противного. Предположим, что экстремальный многочлен $f_n \in \mathscr{P}_n$ неравенства (1.1) достигает равномерной нормы в точке $t \in (-1,1)$. На многочлене f_n должно обратиться в равенства оба неравенства в (4.1) и, в частности, второе неравенство. А это означает, что на многочлене f_n достигается норма оператора Θ_t. В силу теоремы 3 при $1 < q < \infty$ многочлен f_n есть тождественная константа, а при $q = 1$ многочлен f_n сохраняет знак на $(-1,1)$. Сейчас важно, что в обоих случаях многочлен f_n сохраняет знак на $(-1,1)$. В силу формулы (3.13) многочлен $g_n = \Theta_t f_n$ также сохраняет знак на $(-1,1)$.

На многочлене f_n первое неравенство (4.1) должно обратиться в равенство. Следовательно, многочлен $g_n = \Theta_t f_n$ является экстремальным в неравенстве (1.4). В силу свойства единственности экстремального многочлена

g_n лишь мультипликативной константой отличается от ϱ_n. Многочлен ϱ_n имеет n перемен знака на $(-1,1)$. Поэтому g_n не может сохранять знак на $(-1,1)$. Полученное противоречие показывает, что в случае $\alpha > -1/2$ экстремальный многочлен неравенства (1.1) не может достигать равномерной нормы на интервале $(-1,1)$. Теорема 1 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Nik1951 1. **Никольский С. М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.

Zygmund 2. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965. 538 с.

KornBabLig 3. **Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.** Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. Киев: Наукова думка, 1992. 304 с.

Milovanovic 4. **Milovanović G. V., Mitrinovic D. S., Rassias Th. M.** Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific, 1994. 821 p.

Borwein-Erdelyi 5. **Borwein P., Erdelyi T.** Polynomials and polynomial inequalities, Grad. Texts in Math., 161, Springer-Verlag, New York, NY, 1995

RahmanSchmeisser 6. **Rahman Q. I., Schmeisser G.** Analytic theory of polynomials. Oxford: Oxford Univ. Press, 2002. 742 P.

Polya-Szego 7. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1978. Т. 2. 431 с.

Szego 8. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.

Iv75 9. **Иванов В. И.** Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Мат. заметки. 1975. Т. 18, вып. 4. С. 489–498.

Iv80 10. **Иванов В. И.** Некоторые экстремальные свойства полиномов и обратные неравенства теории приближения // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 79–110.

Bernstein2952-1 11. **Бернштейн С. Н.** Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд. АН СССР, 1952. Т. 1. Конструктивная теория функций. 581 с.

Daugavet1972 12. **Даугавет И.К, Рафальсон С.З.** Некоторые неравенства типа Маркова — Никольского для алгебраических многочленов // Вестн. Ленингр. ун-та. 1972. № 1. С. 15–25.

Konjagin 13. **Конягин С. В.** Оценки производных от многочленов // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 5. С. 1116–1118.

Glazyrina2005 14. **Глазырина П. Ю.** Неравенство братьев Марковых в пространстве L_0 на отрезке // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 1. С. 59–65.

azyrinaTrIMM2005 15. **Глазырина П. Ю.** Неравенство Маркова — Никольского для пространств L_q, L_0 на отрезке // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 60–71.

zyrinaMathZam-08 16. **Глазырина П. Ю.** Точное неравенство Маркова — Никольского для алгебраических многочленов в пространствах L_q и L_0 на отрезке // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 1. С. 3–22.

Simonov-2011 17. **Симонов И. Е.** Точное неравенство типа братьев Марковых в пространствах L_p, L_1 на отрезке // Труды института математики и механики УРО РАН. 2011. Том 17, № 3. С. 282–290.

Simonov-2013 18. **Симонов И. Е.** Точное неравенство типа братьев Марковых в пространствах L_∞, L_1 на отрезке // Математические заметки. 2013. Том 93, выпуск 4. С. 604–613.

SimonovGlazyrina 19. **Simonov I.E., Glazyrina P.Yu.** Sharp Markov–Nikol'skii inequality with respect to the uniform norm and the integral norm with Chebyshev weight, J. Approx. Theory **192**, 69–81 (2015), http://dx.doi.org/10.1016/j.jat.2014.10.009

Jackson 20. **Jackson D.** Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. Vol. 39, no. 12. P. 889–906.

Taykov65 21. **Тайков Л. В.** Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, вып. 3. С. 205–211.

Taykov93 22. **Тайков Л. В.** О наилучшем приближении ядер Дирихле // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 6. С. 116–121.

BKP 23. **Babenko V., Kofanov V., Pichugov S.** Comparison of rearrangement and Kolmogorov—Nagy type inequalities for periodic functions // Approx. Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov / Ed. B. Bojanov. Sofia: DARBA. 2002. P. 24–53.

Gorbachev-2005 24. **Gorbachev D. V.** An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 2. P. S117–S138.

Gorbachev-book 25. **Горбачев Д. В.** Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. Тула: Изд-во "Гриф и К", 2005. 152 с.

Lupas 26. **Lupas A.** An inequality for polynomials // Univ. Beograd. Publ. Electrotehn. Fak. Sep. Mat. Fiz. 1974. Vol. 461-497. P. 241–243.

CalderonKlein 27. **Calderon A.P., Klein G.**, On an extremum problem concerning trigonometrical polynomials, Studia Math. 12 (1951) 166–169.

Taikov 28. **Taikov L.V.**, A generalization of an inequality of S.N. Bernstein, Trudy Mat. Inst. Steklov 78 (1965) 43–47 (in Russian).

Saff+Sheil-Small 29. **Saff E.B., Sheil-Small T.**, Coefficient and integral mean estimates for algebraic and trigonometric polynomials with restricted zeros, J. London Math. Soc. 9 (1974) 16–22.

Arestov1980 30. **Арестов В. В.** О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1980. Т. 27, вып. 4. С. 539–547.

Arestov1981 31. **Арестов В.В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 3-–22.

ov-Glazyrina-DAN 32. **Арестов В. В., Глазырина П. Ю.** Интегральные неравенства для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН. 2012. Т. 442, № 6. С. 727–731.

ov-Glazyrina-JAT 33. **Arestov V. V., Glazyrina P. Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501—1512.

Arestov-CTF-2012 34. **Arestov V. V.** Sharp integral inequalities for trigonometric polynomials // Constructive theory of functions: in memory of Borislav Bojanov (Proceedings of the International conference, Sozopol, 2010). (G. Nikolov and R. Uluchev, Eds.) Sofia: Prof. Marin Drinov Academic Publishing House, 2012. P. 30–45.

Arestov-2010-2 35. **Арестов В. В.** Точные неравенства для тригонометрических полиномов относительно интегральных функционалов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 1–16.

DitzTikh 36. **Ditzian Z., Tikhonov S.** Ul’yanov and Nikol’skii-type inequalities // Journal of Approximation Theory. 133 (2005) 100 - 133.

Deikalova2013 37. **Арестов В. В., Дейкалова М. В.** Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 999–999.

ova-Rogozina2012 38. **Дейкалова М. В., Рогозина В. В.** Неравенство Джексона — Никольского между равномерной и интегральной нормами алгебраических многочленов на евклидовой сфере // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 162–171.

Korneichuk 39. **Корнейчук Н. П.** Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320 с.

Babenko-1998 40. **Бабенко А. Г.** Точное неравенство Джексона – Стечкина для L^2-приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах // Известия РАН. Серия математическая. 1998. Т. 68, № 6. С. 27–52.

Watson 41. **Ватсон Г.Н.** Теория бесселевых функций. Ч.1 – М.: ИЛ, 1949. 798 с.

Suetin 42. **Суетин П.К.** Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976. 327 с.