ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 20 № 1 2014

УДК 517.518.86

НЕРАВЕНСТВО БЕРНШТЕЙНА — СЕГЕ ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ[1]

В. В. Арестов, П. Ю. Глазырина

Во множестве $\mathscr{F}_n$ тригонометрических полиномов порядка $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами рассматривается оператор Сеге D_θ^α, определенный при $\alpha, \theta \in \mathbb{R},\ \alpha \geqslant 0$, соотношением $D_\theta^\alpha f_n(t) = \cos\theta\ D^\alpha f_n(t) - \sin\theta\ D^\alpha \widetilde{f}_n(t)$, в котором $D^\alpha f_n$ и $D^\alpha \widetilde{f}_n$ суть дробные производные Вейля (вещественного) порядка α полинома f_n и его сопряженного $\widetilde{f}_n$. В работе, в частности, доказано, что если $\alpha \geqslant n \ln 2n$, то для любого $\theta \in \mathbb{R}$ в пространствах L_p при всех $p \geqslant 0$ на множестве $\mathscr{F}_n$ имеет место точное неравенство $\|\cos\theta\ D^\alpha f_n - \sin\theta\ D^\alpha \widetilde{f}_n\|_{L_p} \leqslant n^\alpha \|f_n\|_{L_p}$. Для классических производных (натурального порядка $\alpha \geqslant 1$) это неравенство в равномерной норме ($p = \infty$) получил Г. Сеге (1928), а при $1 \leqslant p < \infty$ — А. Зигмунд (1931–1935). Для дробных производных (вещественного) порядка $\alpha \geqslant 1$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ его доказал А. И. Козко (1998).

Ключевые слова: тригонометрический полином, производная Вейля дробного порядка, неравенство Бернштейна, неравенство Сеге.

V. V. Arestov, P. Yu. Glazyrina. Bernstein—Szegö inequality for fractional derivatives of trigonometric polynomials.

On the set $\mathscr{F}_n$ of trigonometric polynomial of degree $n \geqslant 1$ with complex coefficients, we consider the Szegö operator D_θ^α defined by the relation $D_\theta^\alpha f_n(t) = \cos\theta\ D^\alpha f_n(t) - \sin\theta\ D^\alpha \widetilde{f}_n(t)$ for $\alpha, \theta \in \mathbb{R},\ \alpha \geqslant 0$; where $D^\alpha f_n$ and $D^\alpha \widetilde{f}_n$ are the Weyl fractional derivatives of (real) order α of the polynomial f_n and its conjugate polynomial $\widetilde{f}_n$. In particular, we prove that, if $\alpha \geqslant n \ln 2n$, then, for any $\theta \in \mathbb{R}$, the sharp inequality $\|\cos\theta\ D^\alpha f_n - \sin\theta\ D^\alpha \widetilde{f}_n\|_{L_p} \leqslant n^\alpha \|f_n\|_{L_p}$ holds in the spaces L_p for all $p \geqslant 0$ on the set $\mathscr{F}_n$. For classical derivatives (of integer order $\alpha \geqslant 1$), this inequality was obtained by Szegö (1928) in the uniform norm ($p = \infty$) and by Zygmund (1931–1935) for $1 \leqslant p < \infty$. A.I.Kozko (1998) proved this inequality for fractional derivatives of (real) order $\alpha \geqslant 1$ and $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Keywords: trigonometric polynomial, Weyl fractional derivative, Bernstein inequality, Szegö inequality.

1. Предыстория. Вспомогательные утверждения

1.1. Обозначения. Пусть $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}_n(\mathbb{P})$ есть множество тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1.1}$$

порядка $n \geqslant 1$ с коэффициентами из поля $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ вещественных или поля $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ комплексных чисел. Полином $\widetilde{f}_n(t) = \sum_{k=1}^n (a_k \sin kt - b_k \cos kt)$ называют сопряженным для полинома f_n.

На множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ рассмотрим функционал $\|f\|_p = \|f\|_{L_p}$ для $0 \leqslant p \leqslant +\infty$, определенный соотношениями

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \qquad 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \max\{|f(t)|\colon t \in \mathbb{R}\} = \|f\|_{C_{2\pi}},$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00462, 12-01-31495), Министерства образования и науки РФ (госзадание 1.1544.2011) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

$$\|f\|_0 = \lim_{p\to+0}\|f\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(t)|dt\right).$$

1.2. Неравенства Бернштейна и Сеге для классических производных в равномерной норме. Во множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ выполняется известное неравенство Бернштейна

$$\|f_n'\|_{C_{2\pi}} \leqslant n\|f_n\|_{C_{2\pi}}, \qquad f_n\in\mathscr{F}_n(\mathbb{C}), \tag{1.2}$$

все экстремальные полиномы которого имеют вид

$$a\cos nt + b\sin nt, \qquad a,b\in\mathbb{C}. \tag{1.3}$$

С. Н. Бернштейн получил неравенство (1.2) для полиномов с вещественными коэффициентами [1, п. 10]. Впрочем, в первоначальном варианте [2, п. 12] работы [1] он доказал это неравенство с константой n для нечетных и четных тригонометрических полиномов и как следствие с константой $2n$ на классе всех полиномов (1.1) из $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$. В авторских комментариях [3, п. 3.4] к работе [1] С. Н. Бернштейн пишет, что вскоре после появления работы [2] Э. Ландау сообщил ему, что неравенство (1.2) для общего вида (1.1) полиномов (с вещественными коэффициентами) является элементарным следствием неравенства для нечетных полиномов; это доказательство впервые было опубликовано в [4, § 10].

В 1914 году М. Рисс [5, п. 2; 6, § 2] получил неравенство (1.2) с наилучшей константой n (как на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$, так и на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$) с помощью известной интерполяционной формулы для производной тригонометрического полинома; в 1928 году Г. Сеге получил [7] более общий результат, который будет приведен в теореме B ниже.

Как следствие (1.2) при любых натуральных n и r имеет место точное неравенство

$$\|f_n^{(r)}\|_{C_{2\pi}} \leqslant n^r\|f_n\|_{C_{2\pi}}, \qquad f_n\in\mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.4}$$

В дальнейшем неравенства (1.2) и (1.4) обобщались в разных направлениях. Г. Сеге в 1928 году доказал [7, формулы (1) и (1′)] (см. также [8, т. 2, гл. 10, § 3]) следующее утверждение.

Теорема A. *При любом $n\geqslant 1$ для любого вещественного θ на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ имеет место неравенство*

$$\left\|f_n'\cos\theta - \widetilde{f}_n'\sin\theta\right\|_\infty \leqslant n\|f_n\|_\infty, \qquad f_n\in\mathscr{F}_n(\mathbb{R}), \tag{1.5}$$

а как следствие и неравенство

$$\left\|\sqrt{\left(f_n'\right)^2+\left(\widetilde{f}_n'\right)^2}\,\right\|_\infty \leqslant n\|f_n\|_\infty, \qquad f_n\in\mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{1.6}$$

Неравенства (1.5) *и* (1.6) *точные и обращаются в равенство лишь на полиномах* (1.3) *с коэффициентами $a,b\in\mathbb{R}$.*

Г. Сеге получил неравенство (1.5) с помощью интерполяционной формулы, обобщающей формулу М. Рисса [5; 6]. А именно, Г. Сеге доказал следующее утверждение [7, формула (10)] (см. также доказательство в [8, т. 2, гл. 10, § 3]).

Теорема B. *При $n\geqslant 1$ для любого вещественного θ на множестве тригонометрических полиномов $f_n\in\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ имеет место формула*

$$\widetilde{f}_n'(t)\cos\theta - f_n'(t)\sin\theta = \sum_{k=1}^{2n}\mu_k f_n(t+t_k), \qquad t\in(-\infty,\infty), \tag{1.7}$$

в которой

$$t_k = t_k(\theta) = \frac{2k-1}{n}\pi + \frac{\theta}{n}, \qquad \mu_k=\mu_k(\theta) = \frac{(-1)^{k+1}+\sin\theta}{4n\sin^2(t_k/2)}.$$

Г. Сеге доказал [7] формулу (1.7) на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ вещественных полиномов. Из соображений линейности следует, что (1.7) имеет место и для полиномов $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ с комплексными коэффициентами. Для коэффициентов формулы (1.7) выполняется [7, формула (11)] равенство $\sum_{k=1}^{2n} |\beta_k| = n$, поэтому (1.7) влечет неравенство (1.5) как на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$, так и на $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$.

1.3. Неравенства Бернштейна и Сеге для дробных производных в равномерной норме. Производной Вейля (или дробной производной) вещественного порядка $\alpha \geqslant 0$ полинома f_n, записанного в виде (1.1), называют полином

$$D^\alpha f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \Big(a_k \cos\Big(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\Big) + b_k \sin\Big(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\Big)\Big); \tag{1.8}$$

если число α натуральное, то дробная производная совпадает с классической: $D^\alpha f_n = f_n^{(\alpha)}$. Обозначим через B_n^α наилучшую константу в неравенстве Бернштейна

$$\|D^\alpha f_n\|_\infty \leqslant B_n^\alpha \|f_n\|_\infty, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}), \tag{1.9}$$

для дробных производных на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$. П. И. Лизоркин [9, теорема 2] доказал, что если $\alpha \geqslant 1$, то $B_n^\alpha = n^\alpha$, т. е. для дробных производных порядка $\alpha \geqslant 1$ имеет место аналог неравенства (1.4). Неравенство (1.9) при $0 < \alpha < 1$ изучали Т. Банг [10], С. П. Гейсберг [11] (см. [12, теорема 19.10 и примечания к § 19, п. 8]) и Г. Вилмес [13, remark 4]. Наилучшими на данный момент являются оценки [13]

$$n^\alpha \leqslant B_n^\alpha \leqslant 2^{1-\alpha} n^\alpha, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

А. И. Козко [14, corollary 1] распространил теорему A на дробные производные (1.8), а именно, получил для дробных производных следующее утверждение.

Теорема C. *При любом $n \geqslant 1$ для произвольного вещественного $\alpha \geqslant 1$ и любого вещественного θ на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{R})$ имеет место неравенство*

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \Big|D^\alpha f_n(t)\cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n(t)\sin\theta\Big| \leqslant n^\alpha \|f_n\|_\infty, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}), \tag{1.10}$$

а как следствие и неравенство

$$\bigg\|\sqrt{\big(D^\alpha f_n\big)^2 + \big(D^\alpha \widetilde{f}_n\big)^2}\,\bigg\|_\infty \leqslant n^\alpha \|f_n\|_\infty, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{1.11}$$

Пусть $C_n^\alpha(\theta)$ и C_n^α суть наилучшие (т. е. наименьшие возможные) константы в неравенствах

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \Big|D^\alpha f_n(t)\cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n(t)\sin\theta\Big| \leqslant C_n^\alpha(\theta) \|f_n\|_\infty, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}), \tag{1.12}$$

$$\bigg\|\sqrt{\big(D^\alpha f_n\big)^2 + \big(D^\alpha \widetilde{f}_n\big)^2}\,\bigg\|_\infty \leqslant C_n^\alpha \|f_n\|_\infty, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{R}). \tag{1.13}$$

Неравенство (1.9) есть частный случай (1.12), а точнее, $B_n^\alpha = C_n^\alpha(0)$.

Утверждения теоремы C означают, что если $\alpha \geqslant 1$, то $C_n^\alpha = C_n^\alpha(\theta) = n^\alpha$ при любом $\theta \in \mathbb{R}$. Естественным является вопрос об условиях на параметры, при которых величины $C_n^\alpha(\theta)$ и C_n^α равны n^α. Полином $f_n(t) = \cos nt$ показывает, что $C_n^\alpha \geqslant C_n^\alpha(\theta) \geqslant n^\alpha$ для любых значений параметров. Следовательно, тот факт, что неравенство (1.10) или (1.11) не выполняется, означает, что константа в соответствующем неравенстве (1.12) или (1.13) будет больше n^α. Следующее утверждение для четных n доказал А. И. Козко [14, theorem 3]; в общем случае оно обосновано в [15, lemma 3] с помощью других соображений.

Теорема D. *Для $n \geqslant 2$, $0 < \alpha < 1$ при $\theta = -\alpha\pi/2$ для наилучшей константы в неравенстве* (1.12) *имеет место строгое неравенство $C_n^\alpha(\theta) > n^\alpha$.*

Из теоремы D следует, что при любом $n \geqslant 2$ для $0 < \alpha < 1$ неравенство (1.11) уже не имеет места, а точнее, наилучшая константа C_n^α в (1.13) обладает свойством $C_n^\alpha > n^\alpha$. О точных значениях величины $C_n^\alpha(\theta)$ при $0 \leqslant \alpha < 1$ известны лишь отдельные результаты (см. библиографию в [16; 15]).

А. И. Козко [14, lemma] для обоснования результатов теоремы C построил для оператора

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = D^\alpha f_n(t)\cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n(t)\sin\theta \tag{1.14}$$

квадратурную формулу, обобщающую квадратурные формулы М. Рисса [5,6] и Г. Сеге [7]. Эта формула имеет вид

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \mu_k(\alpha,\theta)(-1)^k f_n(t_k+t), \qquad t_k = \frac{\pi k}{n} + \frac{\alpha\pi}{2n} + \frac{\theta}{n}; \tag{1.15}$$

здесь

$$\begin{aligned}\mu_k(\alpha,\theta) = \Bigg(&(-1)^{k+1}\sum_{\ell=1}^{n-1}((\ell+1)^\alpha - 2\ell^\alpha + (\ell-1)^\alpha)\cos\left(\ell t_k - \frac{\alpha\pi}{2} - \theta\right)\\ &+ n^\alpha - (n-1)^\alpha + (-1)^{k+1}\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}+\theta\right)\Bigg)\left(4n\sin^2\frac{t_k}{2}\right)^{-1}\end{aligned}$$

в случае $2k + \alpha + 2\theta/\pi \neq 0\,(\mathrm{mod}\ 4n)$ и

$$\mu_k(\alpha,\theta) = \frac{1}{n}\left(\sum_{\ell=1}^{n-1}\ell^\alpha + \frac{n^\alpha}{2}\right)$$

в случае $2k + \alpha + 2\theta/\pi = 0\,(\mathrm{mod}\ 4n)$. При $\alpha \geqslant 1$ коэффициенты $\mu_k(\alpha,\theta)$ формулы (1.15) неотрицательные и $\sum_{k=0}^{2n-1}\mu_k(\alpha,\theta) = n^\alpha$.

Формула (1.14) справедлива для полиномов $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ с комплексными коэффициентами. Поэтому при любом $n \geqslant 1$ для произвольного вещественного $\alpha \geqslant 1$ и любого вещественного θ неравенство (1.10) на самом деле имеет место на множестве полиномов $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$; в этом случае оно обращается в равенство лишь на полиномах (1.3).

1.4. Неравенства Бернштейна и Сеге для дробных производных в классических интегральных нормах. В работе А. И. Козко [14, theorem 1] содержится такое утверждение.

Теорема E. *Предположим, что функция φ на полуоси $[0,\infty)$ не убывает и выпукла (вниз). Тогда при любом $n \geqslant 1$ для произвольного вещественного $\alpha \geqslant 1$ и любого вещественного θ на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ имеет место неравенство*

$$\int_0^{2\pi}\varphi\left(\left|D^\alpha f_n(t)\cos\theta - D^\alpha\widetilde{f}_n(t)\sin\theta\right|\right)dt \leqslant \int_0^{2\pi}\varphi(n^\alpha|f_n(t)|)\,dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}).$$

Последнее неравенство точное и на полиномах (1.3) *обращается в равенство. Если функция φ (строго) возрастает на $[0,\infty)$, то экстремальными являются только такие полиномы.*

Функция $\varphi(u) = u^p$ при $1 \leqslant p < \infty$ удовлетворяет условиям теоремы E, поэтому как частный случай теоремы выполняется такое утверждение.

Следствие 1. *Для всех* $n \geqslant 1$, $\alpha \geqslant 1$, $\theta \in \mathbb{R}$ *и* $p \in [1, \infty)$ *имеет место неравенство*

$$\left\| D^\alpha f_n \cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n \sin\theta \right\|_p \leqslant n^\alpha \, \|f_n\|_p \,, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}),$$

и, в частности, неравенства

$$\|D^\alpha f_n\|_p \leqslant n^\alpha \, \|f_n\|_p \,, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}),$$

$$\left\| D^\alpha \widetilde{f}_n \right\|_q \leqslant n^\alpha \, \|f_n\|_p \,, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.16}$$

Все три неравенства точные и обращаются в равенства лишь на полиномах (1.3).

Утверждения теоремы E и следствия 1 для классических производных целого порядка $\alpha \geqslant 1$ установил ранее А. Зигмунд [8, т. 2, гл. 10].

1.5. Неравенства Бернштейна и Сеге для классических производных в пространствах L_p, $0 \leqslant p < 1$. Пусть $\Phi^+ = \Phi^+(0, \infty)$ есть класс функций φ, определенных на $(0, \infty)$ и представимых в виде $\varphi(u) = \psi(\ln u)$, где функция $\psi(v) = \varphi(e^v)$ непрерывна, не убывает и выпукла на $(-\infty, \infty)$. Классу Φ^+ принадлежат, например, все неубывающие выпуклые функции, функции u^p при $p > 0$, $\ln u$, $\ln^+ u = \max\{0, \ln u\}$, $\ln(1 + u^p)$ при $p > 0$. Исходя из свойств выпуклых функций, можно утверждать, что функция φ, определенная на $(0, \infty)$, принадлежит классу Φ^+ в том и только в том случае, если функция $u\varphi'(u)$ не убывает на $(0, \infty)$. Класс функций $\Phi^+ = \Phi^+(0, \infty)$ был введен в [17, 18] при изучении неравенства Бернштейна и его обобщений в пространствах L_p при $p \in [0, 1)$ (и более общих пространствах). В [19] была показана естественность этого класса в данной тематике.

В [15, lemma 1] дано другое описание класса Φ^+. А именно, функция φ, определенная на полуоси $(0, \infty)$, принадлежит классу Φ^+ в том и только в том случае, если она имеет конечный или равный $-\infty$ предел $c = \lim\limits_{r \to +0} \varphi(r)$ в точке 0 справа и при доопределении $\varphi(0) = c$ функция $\phi(z) = \varphi(|z|)$ субгармонична в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. В работе [18, следствие 6] содержится следующее утверждение, обоснованное без использования тех или иных квадратурных формул.

Теорема F. *Для функций* $\varphi \in \Phi^+$ *и любых целых* $n \geqslant 1$, $r \geqslant 1$ *выполняется точное неравенство*

$$\int\limits_0^{2\pi} \varphi(|f_n^{(r)}(t)|)dt \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \varphi(n^r |f_n(t)|)dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.17}$$

На полиномах $f_n(t) = ae^{-int} + be^{int}$, $a, b \in \mathbb{C}$, *неравенство* (1.17) *обращается в равенство*; *если функция* $u\varphi'(u)$ *строго возрастает на* $(0, +\infty)$, *то других экстремальных полиномов нет.*

Следствие 2. *При* $0 \leqslant p \leqslant \infty$ *для целых* $n, r \geqslant 1$ *имеет место неравенство*

$$\|f_n^{(r)}\|_p \leqslant n^r \|f_n\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}); \tag{1.18}$$

неравенство точное и обращается в равенство лишь на полиномах (1.3).

Функция $\varphi(u) = \ln u$ и функции $\varphi(u) = u^p$ при $0 \leqslant p < \infty$ удовлетворяют условиям теоремы F. Поэтому при $0 \leqslant p < \infty$ утверждение следствия 2 содержится в теореме F. При $p = \infty$ неравенство (1.18) является неравенством Бернштейна (1.4). При $1 \leqslant p < \infty$ неравенство (1.18) доказал А. Зигмунд [8, т. 2, гл. 10]. Таким образом, при $1 \leqslant p < \infty$ имеется, по крайней мере, два доказательства (1.18).

В силу (1.16) для любых натуральных n, r и $1 \leqslant p \leqslant \infty$ справедливо не только неравенство (1.18), но также и (точное) неравенство

$$\|\widetilde{f}_n^{(r)}\|_{L_p} \leqslant n^r \|f_n\|_{L_p}, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.19}$$

Как показано в [20, теоремы 3 и 5], неравенство (1.19), в отличие от (1.18), на случай $0 \leqslant p < 1$, вообще говоря, уже не переносится. А именно, если $r \geqslant n \ln 2n$, то неравенство (1.19) справедливо при всех $p \geqslant 0$. Для фиксированного же r при $n \to \infty$ наилучшая константа в аналоге неравенства (1.19) в пространстве L_0 ведет себя как 4^{ε_n}, $\varepsilon_n = n + o(n)$. Видно, что рост этой константы по n существенно больше, чем константы n^r в (1.19) при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

1.6. Неравенство Бернштейна — Сеге для дробных производных в пространствах L_p, $0 \leqslant p < 1$. Для значений параметров $\theta \in \mathbb{R}$, $\alpha \geqslant 0$ рассмотрим на $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ оператор Сеге

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = \cos\theta\ D^\alpha f_n(t) - \sin\theta\ D^\alpha \widetilde{f}_n(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \Big(a_k \cos\Big(kt + \frac{\alpha\pi}{2} + \theta\Big) + b_k \sin\Big(kt + \frac{\alpha\pi}{2} + \theta\Big)\Big). \tag{1.20}$$

В данной работе нас интересует в первую очередь неравенство

$$\|D_\theta^\alpha f_n\|_p \leqslant C_n^\alpha(\theta)_p\ \|f_n\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}),$$

с наименьшей возможной константой $C_n^\alpha(\theta)_p$ при $0 \leqslant p \leqslant \infty$. Как уже было сказано выше, А. И. Козко [14] доказал, что для всех $n \geqslant 1$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ в случае $\alpha \geqslant 1$

$$C_n^\alpha(\theta)_p = n^\alpha. \tag{1.21}$$

Приведем известные порядковые результаты роста величины $C_n^\alpha(\theta)_p$ при $n \to \infty$ и фиксированных остальных параметрах. В работах Э. С. Белинского, И. Р. Лифлянда [21] и К. Руновского, Г.-Ю. Шмайссера [22, theorem 5.3, theorem 5.4] доказано, что $C_n^\alpha(\theta)_p \asymp n^\alpha$ для $\theta \in \mathbb{R}$, $p > 0$, $\alpha > (1/p-1)_+ = \max\{0, 1/p-1\}$. Э. С. Белинский и И. Р. Лифлянд [21] также установили, что $C_n^\alpha(0)_p \asymp n^{1/p-1}$ для $0 < p < 1$, $0 < \alpha < 1/p-1$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, и $C_n^\alpha(0)_p \asymp n^{1/p-1} \log^{1/p} n$ для $0 < p < 1$, $\alpha = 1/p-1 \notin \mathbb{N}$. При $\alpha = 0$ А. И. Козко [14, theorem 5] доказал, что $C_n^0(0)_p \asymp n^{(1/p-1)_+}$ для всех $p > 0$, А. О. Леонтьева [23, теорема 1] доказала, что $C_n^0(0)_0 \asymp 4^n n^{-1/2}$. В монографии А. Зигмунда [8, Т. 1, гл. 2, § 12] показано, что $C_n^0(\pi/2)_\infty \asymp \log n$; точное значение $C_n^0(\pi/2)_\infty$ нашел Л. В. Тайков [24].

Определим величину $\alpha(n)$, $n \geqslant 1$, соотношениями

$$\alpha(1) = 0; \qquad \alpha(n) = \frac{\ln 2n}{\ln(n/(n-1))}, \qquad n \geqslant 2.$$

Важную роль в дальнейшем будет играть условие

$$\alpha \geqslant \alpha(n). \tag{1.22}$$

Имеем $1/n < \ln(n/(n-1)) < 1/(n-1)$. Поэтому условие (1.22) будет выполняться, если выполняется более прозрачное (и весьма близкое) ограничение $\alpha \geqslant n\ln(2n)$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Если порядок дробной производной α удовлетворяет условию* (1.22), *то для любой функции $\varphi \in \Phi^+$ при любом вещественном θ имеет место точное неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(\left|D^\alpha f_n(t)\cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n(t)\sin\theta\right|\right) dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi\left(n^\alpha\ |f_n(t)|\right) dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.23}$$

На полиномах $a\cos nt + b\sin nt$, $a, b \in \mathbb{C}$, это неравенство обращается в равенство; если функция $u\varphi'(u)$ строго возрастает на $(0, +\infty)$, то других экстремальных полиномов нет.

Как частный случай теоремы 1 справедливо такое утверждение.

Теорема 2. *Если порядок α дробной производной удовлетворяет условию* (1.22), *то для* $0 \leqslant p < \infty$ *при произвольном вещественном* θ *имеет место точное неравенство*

$$\left\| D^\alpha f_n \cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n \sin\theta \right\|_p \leqslant n^\alpha \|f_n\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.24}$$

На полиномах $a\cos nt + b\sin nt$, $a, b \in \mathbb{C}$, *неравенство* (1.24) *обращается в равенство*; *при* $0 < p < \infty$ *других экстремальных полиномов нет.*

Согласно теореме 2 при $n \geqslant 1$ для значений параметра α, удовлетворяющих условию (1.22), при любом вещественном θ равенство (1.21) справедливо и в случае $0 \leqslant p < 1$.

Интерес представляет неравенство (1.24) при $\theta = 0$, т. е. неравенство

$$\|D^\alpha f_n\|_p \leqslant n^\alpha \|f_n\|_p, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{1.25}$$

В соответствии с (1.4) для классических производных оно выполняется при любом натуральном α, т. е. $\alpha \geqslant 1$. Можно было бы ожидать, что оно выполняется для всех вещественных $\alpha \geqslant 1$. Однако этот факт не имеет места. Согласно теореме 2 неравенство (1.25) заведомо выполняется при условии (1.22). Вычисления на компьютере позволяют высказать гипотезу, что неравенства (1.24) и (1.25) выполняются для вещественных α в том и только в том случае, если выполнено более слабое в сравнении с (1.22) ограничение $\alpha \geqslant 2(n-1)$. В последнем разделе работы эта гипотеза будет подтверждена при $n = 2$.

2. Редукция к задачам для алгебраических многочленов на единичной окружности комплексной плоскости

Формула

$$f_n(t) = e^{-int} P_{2n}(e^{it}) \tag{2.1}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ тригонометрических полиномов порядка n и множеством $\mathscr{P}_{2n}$ алгебраических многочленов степени $2n$ (см., к примеру, [8, т. 2, гл. 10]). Используя этот факт, можно переписать неравенство (1.23) для тригонометрических полиномов в виде соответствующего неравенства для алгебраических многочленов (на единичной окружности комплексной плоскости). Эти неравенства и будут изучаться ниже.

2.1. Операция композиции Сеге на множестве алгебраических многочленов. Пусть $\mathscr{P}_n = \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ есть множество алгебраических многочленов степени (не выше) $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами. На множестве $\mathscr{P}_n$ рассмотрим функционал $\|P_n\|_p = \|P_n\|_{H_p}$, определенный в зависимости от значений параметра p соотношениями

$$\|P_n\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| P_n\left(e^{it}\right) \right|^p dt \right)^{1/p}, \qquad 0 < p < \infty,$$

$$\|P_n\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|P_n\|_p = \max\left\{ \left| P_n\left(e^{it}\right) \right| : t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\|P_n\|_0 = \lim_{p \to +0} \|P_n\|_p = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln\left| P_n\left(e^{it}\right) \right| dt \right).$$

Для многочленов

$$\Lambda_n(z) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \binom{n}{k} z^k, \qquad P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k} z^k \tag{2.2}$$

многочлен

$$(\Lambda_n P_n)(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k \binom{n}{k} z^k \tag{2.3}$$

называется композицией Сеге многочленов Λ_n и P_n. Свойства композиции Сеге можно найти в [26, отд. V; 27, гл. IV], см. также работы [28; 29] и приведенную в них библиографию. При фиксированном Λ_n композиция Сеге (2.3) является линейным оператором в $\mathscr{P}_n$. Для композиции Сеге многочленов справедливо следующее утверждение [25, теорема 1].

Теорема G. *При любом $n \geqslant 1$ для функций $\varphi \in \Phi^+$ и любых двух многочленов на множестве $\mathscr{P}_n$ справедливо неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|(\Lambda_n P_n)(e^{it})|)dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi(\|\Lambda_n\|_0 \ |P_n(e^{it})|)dt. \tag{2.4}$$

Для функции $\varphi(u) = \ln u$ неравенство (2.4) принимает вид

$$\|\Lambda_n P_n\|_0 \leqslant \|\Lambda_n\|_0 \ \|P_n\|_0.$$

Это неравенство в несколько иной форме было ранее доказано в [29, теорема 7]. Для любого Λ_n на многочленах $P_n(z) = c(1+z)^n, \ c \in \mathbb{C}$, оно обращается в равенство.

Пусть Ω_n^+, Ω_n^- и $\Omega_n^1 = \Omega_n^+ \bigcap \Omega_n^-$ суть множества многочленов $\Lambda_n \in \mathscr{P}_n$, все n нулей которых лежат в единичном круге $|z| \leqslant 1$, в области $|z| \geqslant 1$ или на единичной окружности соответственно. Положим $\Omega_n = \Omega_n^+ \bigcup \Omega_n^-$. В силу известной формулы Пуассона—Йенсена (см., например, [26, отд. III, задача 175; 31, гл. VI, § 4]) имеем

$$\|\Lambda_n\|_0 = |\lambda_n|, \qquad \Lambda_n \in \Omega_n^+; \qquad \|\Lambda_n\|_0 = |\lambda_0|, \qquad \Lambda_n \in \Omega_n^-;$$

$$\|\Lambda_n\|_0 = |\lambda_n| = |\lambda_0|, \qquad \Lambda_n \in \Omega_n^1. \tag{2.5}$$

Обозначим символами Ω_n^+, Ω_n^-, Ω_n^1 и Ω_n также множество операторов (2.3), порожденных многочленами Λ_n из соответствующих классов.

Следующее утверждение является уточнением теоремы G, хотя и было получено ранее (см. [18, теорема 4]).

Теорема H. *При любом $n \geqslant 1$ для операторов $\Lambda_n \in \Omega_n^1$ и функций $\varphi \in \Phi^+$ на множестве $\mathscr{P}_n$ выполняется неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|(\Lambda_n P_n)(e^{it})|)dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi(c_n \ |P_n(e^{it})|)dt, \qquad P_n \in \mathscr{P}_n, \tag{2.6}$$

$$c_n = \|\Lambda_n\|_0 = |\lambda_n| = |\lambda_0|.$$

Неравенство (2.6) *точное и на многочленах*

$$P_n(z) = az^n + b, \qquad a, b \in \mathbb{C}, \tag{2.7}$$

обращается в равенство.

При определенных условиях на многочлен Λ_n и функцию φ других экстремальных многочленов в (2.6), кроме (2.7), нет. При фиксированных $A \in \mathbb{C}, \ \phi \in \mathbb{R}$ многочлен

$$I_n(z) = A(ze^{-i\phi} + 1)^n = Ae^{-in\phi}(z + e^{i\phi})^n = A \sum_{k=0}^{n} z^k \binom{n}{k} e^{-ik\phi} \tag{2.8}$$

по формуле (2.3) порождает оператор

$$I_n P_n(z) = A\sum_{k=0}^{n} c_k \binom{n}{k} e^{-ik\phi} z^k = AP_n(e^{-i\phi}z), \qquad P_n \in \mathscr{P}_n,$$

для которого, очевидно, в неравенстве (2.6) экстремальным будет любой многочлен. При $n \geqslant 2$ многочлену Λ_n, определенному в (2.2), сопоставим многочлен

$$\underline{\Lambda}_{\,n-2}(z) = \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_{k+1} \binom{n-2}{k} z^k \tag{2.9}$$

степени $n-2$; важную роль в исследовании множества экстремальных многочленов неравенства (2.6) играет свойство

$$\underline{\Lambda}_{\,n-2} \in \Omega_{n-2}. \tag{2.10}$$

Следующее утверждение содержится в [18, теорема 2].

Теорема I. *Если при* $n \geqslant 2$ *функция* $\varphi \in \Phi^+$ *и многочлен* $\Lambda_n \in \Omega_n^1$ *обладают следующими свойствами*: *функция* $u\varphi'(u)$ *строго возрастает на* $(0, +\infty)$, *многочлен* Λ_n *не имеет вид* (2.8) *и выполнено условие* (2.10), *то экстремальными в* (2.6) *являются лишь многочлены* (2.7).

2.2. Представление оператора (1.20) **в виде композиции Сеге.** Убедимся, что оператор (1.20) можно записать в виде композиции Сеге алгебраических многочленов (степени $2n$). Полином $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ наряду с формулой (1.1) можно записать в экспоненциальной форме

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} = \sum_{k=1}^{n} c_{-k} e^{-ikt} + c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{ikt}; \tag{2.11}$$

коэффициенты представлений (1.1) и (2.11) будут связаны соотношениями

$$c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \qquad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n; \qquad c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Отметим, что формулу (2.11) можно записать в виде

$$f_n(t) = e^{-int} P_{2n}(e^{it}), \qquad P_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} z^k; \tag{2.12}$$

это как раз и есть формула (2.1).

Найдем выражение для оператора дробного дифференцирования и оператора Сеге на тригонометрических полиномах $f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C})$, записанных в экспоненциальной форме (2.11). При $k \geqslant 1$ для функций

$$e_k^+(t) = e^{ikt}, \qquad e_k^-(t) = e^{-ikt}$$

в соответствии с определением сопряженного полинома имеем

$$\widetilde{e_k^+}(t) = -ie^{ikt} = e^{-i\pi/2} e^{ikt}, \qquad \widetilde{e_k^-}(t) = ie^{-ikt} = e^{i\pi/2} e^{-ikt}.$$

Исходя же из формулы (1.8), находим

$$(D^\alpha e_k^+)(t) = k^\alpha e^{i\frac{\alpha\pi}{2}} e^{ikt}, \qquad D^\alpha e_k^-(t) = k^\alpha e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}} e^{-ikt}.$$

Следовательно,

$$\widetilde{f}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{-k} e^{i\pi/2} e^{-ikt} + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{-i\pi/2} e^{ikt},$$

$$D^\alpha f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha e^{-i\frac{\alpha\pi}{2}} c_{-k} e^{-ikt} + \sum_{k=1}^{n} k^\alpha e^{i\frac{\alpha\pi}{2}} c_k e^{ikt}.$$

Отсюда нетрудно получить выражение и для оператора Сеге (1.20):

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha e^{-i\left(\theta+\frac{\alpha\pi}{2}\right)} c_{-k} e^{-ikt} + \sum_{k=1}^{n} k^\alpha e^{i\left(\theta+\frac{\alpha\pi}{2}\right)} c_k e^{ikt}. \tag{2.13}$$

Полином (2.13) имеет вид $D_\theta^\alpha f_n(t) = e^{-int} G_{2n}(e^{it})$, где

$$G_{2n}(z) = \sum_{k=1}^{n} c_{-k} k^\alpha e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} c_k k^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n+k}.$$

Многочлен G_{2n} является композицией Сеге (см. определение (2.3)) многочлена

$$\Lambda_{2n}^\alpha(z) = \Lambda_{2n}^{\alpha,\theta}(z) = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \binom{2n}{n-k} e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \binom{2n}{n+k} e^{i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n+k} \tag{2.14}$$

и многочлена P_{2n} из (2.12). Итак, для полинома (2.12) справедлива формула

$$D_\theta^\alpha f_n(t) = e^{-int} \left(\Lambda_{2n}^\alpha P_{2n}\right)(e^{it}); \tag{2.15}$$

тем самым, оператор (1.20) представлен в виде композиции Сеге алгебраических многочленов.

Теорема 3. *При любом $n \geqslant 1$ для функций $\varphi \in \Phi^+$ и любых вещественных α и θ справедливо неравенство*

$$\int_0^{2\pi} \varphi\left(\left|D^\alpha f_n(t)\cos\theta - D^\alpha \widetilde{f}_n(t)\sin\theta\right|\right) dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi\left(\|\Lambda_{2n}^\alpha\|_0 \, |f_n(t)|\right) dt, \qquad f_n \in \mathscr{F}_n(\mathbb{C}). \tag{2.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как частный случай теоремы G справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|(\Lambda_{2n}^\alpha P_{2n})(e^{it})|) dt \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi\left(\|\Lambda_{2n}^\alpha\|_0 \, |P_{2n}(e^{it})|\right) dt, \qquad P_{2n} \in \mathscr{P}_{2n}. \tag{2.17}$$

В силу соотношений (2.15) и (2.1) неравенство (2.17) на множестве $\mathscr{P}_{2n}$ алгебраических многочленов порядка $2n$ совпадает с неравенством (2.16) на множестве $\mathscr{F}_n(\mathbb{C})$ тригонометрических полиномов порядка n. $\square$

2.3. Исследование нулей многочлена (2.14)**.** Приведем достаточные условия, при которых все $2n$ нулей многочлена (2.14) лежат на единичной окружности $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ или, что то же самое, все $2n$ нулей полинома

$$e^{-int}\Lambda_{2n}^\alpha(e^{it}) = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k} k^\alpha e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)} e^{-ikt} + \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k} k^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)} e^{ikt}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{n+k} k^\alpha \cos(kt + \pi\alpha/2 + \theta) \tag{2.18}$$

вещественные.

Лемма 1. *Для $n \geqslant 1$,*

$$\alpha \geqslant \alpha(n), \tag{2.19}$$

при любом вещественном θ все $2n$ нулей многочлена (2.14) *лежат на единичной окружности.*

Для обоснования леммы 1 воспользуемся следующим утверждением Пойа [30].

Теорема J. *Если* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 + \mu^2 > 0$,

$$0 < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n,$$

то тригонометрические полиномы

$$\lambda\bigl(a_0 + a_1 \cos t + \cdots + a_n \cos nt\bigr) - \mu\bigl(a_1 \sin t + \cdots + a_n \sin nt\bigr), \tag{2.20}$$

$$\mu\bigl(a_0 + a_1 \cos t + \cdots + a_n \cos nt\bigr) + \lambda\bigl(a_1 \sin t + \cdots + a_n \sin nt\bigr)$$

имеют только вещественные нули, которые перемежаются.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1. В случае $n = 1$ утверждение леммы очевидно.

Пусть $n \geqslant 2$. Утверждение леммы 1 эквивалентно тому, что все $2n$ нулей тригонометрического полинома (2.18) вещественные. Имеем

$$\cos\Bigl(kt + \frac{\pi\alpha}{2} + \theta\Bigr) = \cos\Bigl(\frac{\pi\alpha}{2} + \theta\Bigr)\cos kt - \sin\Bigl(\frac{\pi\alpha}{2} + \theta\Bigr)\sin kt.$$

Следовательно, полином (2.18) имеет вид (2.20) с коэффициентами

$$a_0 = 0, \qquad a_k = \binom{2n}{n+k} k^\alpha \tag{2.21}$$

и значениями параметров

$$\lambda = \cos\Bigl(\frac{\pi\alpha}{2} + \theta\Bigr), \qquad \mu = \sin\Bigl(\frac{\pi\alpha}{2} + \theta\Bigr).$$

Убедимся, что при выполнении условия (2.19) коэффициенты (2.21) возрастают. Очевидно, что при $\alpha \geqslant 0$, $n > 1$ отношение

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \Bigl(\frac{k+1}{k}\Bigr)^\alpha \frac{(n+k)!(n-k)!}{(n+k+1)!(n-k-1)!} = \Bigl(\frac{k+1}{k}\Bigr)^\alpha \frac{(n-k)}{(n+k+1)}$$

по $k \in [1, n-1]$ убывает. Поэтому если

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \Bigl(\frac{n}{n-1}\Bigr)^\alpha \frac{1}{2n} > 1 \qquad \text{или, что то же самое,} \qquad \alpha > \alpha(n) = \frac{\ln 2n}{\ln(n/(n-1))}, \tag{2.22}$$

то коэффициенты (2.21) по k возрастают. Итак, при выполнении условия (2.22) полином (2.18) удовлетворяет условиям теоремы J, а потому все его $2n$ корней вещественные (к тому же, все различные). Для $\alpha = \alpha(n)$ утверждение леммы 1 легко обосновать, исходя из соображений непрерывности, например, с помощью теоремы Гурвица (см. [31, гл. IV, § 3]). $\square$

2.4. Доказательство теоремы 1. Вначале воспользуемся утверждением теоремы 3. Согласно лемме 1 при выполнении условия (2.19) все $2n$ нулей многочлена (2.14) лежат на единичной окружности, т. е. $\Lambda_{2n}^\alpha \in \Omega_{2n}^1$. Старший коэффициент многочлена (2.14) есть $n^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)}$. В силу формулы (2.5) для константы в неравенстве (2.16) справедлива формула $\|\Lambda_{2n}^\alpha\|_0 = n^\alpha$. Так что в условиях теоремы 1 неравенство (2.16) совпадает с неравенством (1.23).

При выполнении условия (2.19) многочлен (2.14) удовлетворяет условиям теоремы H. Поэтому неравенство (2.17) на многочленах $c_n z^{2n} + c_{-n}$, $c_n, c_{-n} \in \mathbb{C}$, обращается в равенство. А следовательно, неравенство (1.23) обращается в равенство на полиномах

$$c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int}, \qquad c_n, c_{-n} \in \mathbb{C}, \tag{2.23}$$

или, что то же самое, на полиномах (1.3).

Для обоснования свойства единственности полиномов (2.23) воспользуемся теоремой I. При $n \geqslant 2$ многочлену (2.14) по формуле (2.9) соответствует многочлен

$$\Lambda^{\alpha}_{2(n-1)}(z) = \sum_{k=1}^{n-1} k^{\alpha} \binom{2(n-1)}{n-k-1} e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n-k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} k^{\alpha} \binom{2(n-1)}{n+k-1} e^{i(\pi\alpha/2+\theta)} z^{n+k-1}; \quad (2.24)$$

это есть тот же многочлен (2.14), соответствующий порядку полиномов $n-1$. Нетрудно понять, что правая часть условия (2.19) по n растет. Поэтому если выполнено условие (2.19), то нули многочлена (2.24) лежат на единичной окружности комплексной плоскости, т. е. $\Lambda^{\alpha}_{2(n-1)} \in \Omega_{2(n-1)}$. Если $n = 1$, то $\Lambda^{\alpha}_{2(n-1)} \equiv 0$, а значит, также выполняется свойство (2.10). Поэтому если функция $u\varphi'(u)$ на $(0, +\infty)$ возрастает, то в силу теоремы I при всех $n \geqslant 1$ в неравенстве (1.23) других экстремальных полиномов, кроме (2.23), нет. Теорема 1 доказана. $\square$

3. Неравенство Бернштейна — Сеге для полиномов второго порядка

3.1. Формулировка результатов. В этом разделе исследуются неравенства (1.23) и (1.24) на множестве тригонометрических полиномов второго порядка. Точнее, будут даны необходимые и достаточные условия на параметры $\alpha \geqslant 0$ и θ для того, чтобы величина $C_2^{\alpha}(\theta)_0 = \|\Lambda_4^{\alpha}\|_0$ равнялась 2^{α}. Результаты раздела содержатся в следующих двух утверждениях.

Лемма 2. *Пусть*

$$d(\alpha,\theta) = 4^{-\alpha}(4^{\alpha}-4)^3 - 108\sin^2\Big(\frac{\pi(\alpha-1)}{2} + \theta\Big), \qquad \alpha \in [1,2], \qquad \theta \in [0,\pi).$$

Для каждого $\theta \in (0,\pi)$ *уравнение*

$$d(\alpha,\theta) = 0$$

имеет единственное решение $\alpha = \alpha_2(\theta) \in (1,2)$, *при этом*

$$d(\alpha,\theta) < 0 \text{ при } \alpha \in [1,\alpha_2(\theta)) \qquad \text{и} \qquad d(\alpha,\theta) > 0 \text{ при } \alpha \in (\alpha_2(\theta),2]. \quad (3.1)$$

Для $\theta = 0$

$$d(\alpha,0) < 0 \text{ при } \alpha \in (1,2) \qquad \text{и} \qquad d(1,0) = d(2,0) = 0.$$

Теорема 4. *Если* $\theta = 0$, *то*

$$C_2^{\alpha}(0)_0 = 2^{\alpha} \text{ при } \alpha = 1 \text{ и } \alpha \geqslant 2, \qquad C_2^{\alpha}(0)_0 > 2^{\alpha} \text{ при } \alpha \in [0,1) \cup (1,2).$$

Если $\theta \in (0,\pi)$, *то*

$$C_2^{\alpha}(\theta)_0 = 2^{\alpha} \text{ при } \alpha \geqslant \alpha_2(\theta), \qquad C_2^{\alpha}(\theta)_0 > 2^{\alpha} \text{ при } \alpha \in [0,\alpha_2(\theta)).$$

3.2. Доказательство леммы 2. Доказательство леммы проведем в несколько этапов.

1. Сначала разберем случай $\theta = 0$. В этом случае

$$d(\alpha) = d(\alpha,0) = \frac{(4^{\alpha}-4)^3}{4^{\alpha}} - 108\sin^2\Big(\frac{\pi(\alpha-1)}{2}\Big).$$

Хорошо известное неравенство $\sin x > 2x/\pi$, $x \in (0,\pi/2)$, влечет оценку

$$d(\alpha) < q(\alpha) = \frac{(4^{\alpha}-4)^3}{4^{\alpha}} - 108(\alpha-1)^2, \qquad \alpha \in (1,2).$$

Имеем

$$q'(\alpha) = 2\ln 4\left(4^{2\alpha} - 6\cdot 4^{\alpha} + 32/4^{\alpha}\right) - 216(\alpha-1),$$

$$q''(\alpha) = 4\ln^2 4\,(4^\alpha(4^\alpha - 3) - 16/4^\alpha) - 216.$$

Из последнего выражения видно, что $q''(\alpha)$ возрастает по $\alpha \in [1,2]$. Следовательно, $q'(\alpha)$ (строго) выпукла вниз, при этом $q'(1) = 0$, $q'(2) > 0$. Отсюда вытекает, что функция $q(\alpha)$ строго возрастает в точке $\alpha = 2$ и меняет характер монотонности на промежутке $[1,2]$ не более одного раза. Но так как $q(1) = q(2) = 0$, то $d(\alpha) < q(\alpha) < 0$ для $\alpha \in (1,2)$. Итак, мы доказали утверждение леммы для $\theta = 0$.

2. Пусть $\theta \in (0, \pi/2)$. Введем обозначения

$$g(\alpha) = \frac{(4^\alpha - 4)^3}{4^\alpha}, \qquad h(\alpha,\theta) = 108\sin^2\Big(\frac{\pi(\alpha-1)}{2} + \theta\Big) = h\Big(\alpha + \frac{2\theta}{\pi}, 0\Big).$$

На промежутке $\alpha \in [1, 2 - 2\theta/\pi]$ функция $h(\alpha,\theta)$ строго возрастает по θ, поэтому имеем

$$d(\alpha,\theta) < g(\alpha) - h(\alpha,0) = d(\alpha,0) \leqslant 0.$$

На промежутке $\alpha \in [2 - 2\theta/\pi, 2]$ функция $g(\alpha)$ возрастает, $h(\alpha,\theta)$ убывает по α и

$$d(2,\theta) = g(2) - h(2,\theta) = 108 - 108\sin^2\Big(\frac{\pi}{2} + \theta\Big) > 0.$$

Следовательно, существует единственное $\alpha = \alpha_2(\theta) \in (1,2)$ со свойством (3.1). Дополнительно в этом случае имеем $\alpha_2(\theta) \in (2 - 2\theta/\pi, 2)$.

3. Пусть $\theta \in [\pi/2, \pi)$. В этом случае на промежутке $\alpha \in [1, 3 - 2\theta/\pi]$ функция $g(\alpha)$ возрастает, $h(\alpha,\theta)$ убывает по α, причем $g(1) = 0$, $h(3 - 2\theta/\pi, \theta) = 0$, поэтому существует единственное $\alpha = \alpha_2(\theta) \in (1, 3 - 2\theta/\pi)$ такое, что $d(\alpha,\theta) < 0$, $\alpha \in [1, \alpha_2(\theta))$, $d(\alpha,\theta) > 0$, $\alpha \in (\alpha_2(\theta), 3 - 2\theta/\pi)$. Для $\alpha \in (3 - 2\theta/\pi, 2)$ имеем $\alpha + 2\theta/\pi - 2 \in (1,2)$, поэтому

$$d(\alpha,\theta) = g(\alpha) - h\Big(\alpha + \frac{2\theta}{\pi} - 2, 0\Big) < g\Big(\alpha + \frac{2\theta}{\pi} - 2\Big) - h\Big(\alpha + \frac{2\theta}{\pi} - 2, 0\Big) \leqslant 0.$$

Таким образом, существует единственное $\alpha = \alpha_2(\theta) \in (1,2)$ со свойством (3.1). Дополнительно в этом случае имеем $\alpha_2(\theta) \in (1, 3 - 2\theta/\pi)$. Лемма доказана. $\square$

3.3. Доказательство теоремы 4. Для $n = 2$ и $\alpha > 0$ рассмотрим многочлен (2.14):

$$\Lambda_4^\alpha(z) = 2^\alpha e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)} + 4e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)}z + 4e^{i(\pi\alpha/2+\theta)}z^3 + 2^\alpha e^{i(\pi\alpha/2+\theta)}z^4 = b_0 + b_1 z + b_3 z^3 + b_4 z^4.$$

Многочлен Λ_4^α обладает свойством $\Lambda_4^\alpha(z) = z^4\overline{\Lambda_4^\alpha(1/\overline{z})}$. Поэтому либо все нули Λ_4^α лежат на границе круга $B = \{z : |z| < 1\}$, либо Λ_4^α имеет нули как в круге B, так и в области $|z| > 1$. Если все нули Λ_4^α лежат на границе B, то $C_2^\alpha(\theta) = 2^\alpha$, в противном случае $C_2^\alpha(\theta) > 2^\alpha$.

Исследуем число нулей Λ_4^α в открытом круге B. Согласно теореме (45,2) из [27] многочлены Λ_4^α и

$$Q(z) = 4\overline{b_4} + 3\overline{b_3}z + \overline{b_1}z^3 = 4\cdot 2^\alpha e^{-(\pi\alpha/2+\theta)} + 3\cdot 4e^{-i(\pi\alpha/2+\theta)}z + 4e^{i(\pi\alpha/2+\theta)}z^3$$

имеют одинаковое число нулей в круге B. Поэтому далее мы будем исследовать многочлен Q. Для удобства вычислений умножим Q на $e^{i(\pi\alpha/2+\theta)}/4$, получим многочлен

$$Q_1(z) = 2^\alpha + 3z + e^{i(\pi\alpha+2\theta)}z^3 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3.$$

Рассмотрим отдельно три случая.

1. Если $\alpha \in [0,1)$ или $\alpha \geqslant 2$, то, применяя теорему Руше, легко убедиться, что $Q_1(z)$ имеет один нуль в B при $\alpha \in [0,1)$ и не имеет нулей в B при $\alpha \geqslant 2$.

2. Если $\alpha = 1$, то $Q_1(z) = 2 + 3z + e^{i(\pi+2\theta)}z^3$. По лемме (42,1) из [27] число нулей в круге B многочлена Q_1 равно числу нулей в B многочлена

$$Q_2(z) = 3(1 + 2z - e^{i(\pi+2\theta)}z^2).$$

Но если z_1, z_2 — нули Q, то по формулам Виета $z_1 z_2 = -e^{-i(\pi+2\theta)}$, $z_1 + z_2 = 2e^{-i(\pi+2\theta)}$. Следовательно, если $\theta = 0$, то многочлен Q_2 не имеет нулей в B, а если $\theta \in (0, \pi)$, то Q_2 имеет в круге B один нуль.

3. Осталось рассмотреть случай $\alpha \in (1, 2)$. Для определения числа нулей Q_1 в круге B применим теорему (43,1) из [27]. Если все определители

$$\Delta_k = \Delta_k(\alpha, \theta) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & \dots & a_{n-k+2} \\ & & & \dots & & & & \dots & \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \dots & a_0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ \overline{a_n} & 0 & 0 & \dots & 0 & \overline{a_0} & \overline{a_1} & \dots & \overline{a_{k-1}} \\ \overline{a_{n-1}} & \overline{a_n} & 0 & \dots & 0 & 0 & \overline{a_0} & \dots & \overline{a_{k-2}} \\ & & & \dots & & & & \dots & \\ \overline{a_{n-k+1}} & \overline{a_{n-k+2}} & \overline{a_{n-k+3}} & \dots & \overline{a_n} & 0 & 0 & \dots & \overline{a_0} \end{vmatrix}, \qquad k = 1, 2, 3,$$

отличны от 0, то число нулей многочлена Q_1 в круге B равно числу перемен знака в последовательности 1, Δ_1, Δ_2, Δ_3. Элементарным подсчетом нетрудно найти, что

$$\Delta_1(\alpha, \theta) = 4^\alpha - 1, \qquad \Delta_2(\alpha, \theta) = (4^\alpha - 1)^2 - 9,$$

$$\Delta_3(\alpha, \theta) = 64^\alpha - 12 \cdot 16^\alpha - 6 \cdot 4^\alpha - 64 - 27 \cdot 4^\alpha \cdot 2 \cdot \cos(\pi\alpha + 2\theta)$$
$$= 4^\alpha \left(\frac{(4^\alpha - 4)^3}{4^\alpha} - 108 \sin^2 \left(\frac{\pi(\alpha - 1)}{2} + \theta \right) \right).$$

Имеем $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, а поведение знака Δ_3 полностью описано в лемме 2, откуда и следует утверждение теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бернштейн С.Н.** О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени // Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд.-во АН СССР, 1952. Т. 1: Конструктивная теория функций. С. 11–104.
2. **Bernstein S.** Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné // Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. 1912. Vol. 2, no. 4. P. 1–103.
3. **Бернштейн С.Н.** Авторские комментарии // Собр. соч.: в 4 т. М.: Изд.-во АН СССР, 1952. Т. 1: Конструктивная теория функций. С. 526–562.
4. **Bernstein S.** Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle. Collection Borel. Paris: Gauthier-Villar, 1926. 213 p.
5. **Riesz M.** Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique // C. R. Acad. Sci. 1914. Vol. 158. P. 1152–1154.
6. **Riesz M.** Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1914. B. 23. S. 354–368.
7. **Szegö G.** Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft. 1928. Jahr 5, Heft 4. S. 59–70.
8. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
9. **Лизоркин П.И.** Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1965. Т. 29, вып. 1. С. 109–126.
10. **Bang T.** Une inégalité de Kolmogoroff et les fonctions presquepériodiques // Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. Matematisk-fysiske Meddenlelser. 1941. Bd. 19, no. 4. P. 1–28.
11. **Гейсберг С.П.** Аналоги неравенств С. Н. Бернштейна для дробной производной // Вопросы прикладной математики и математического моделирования: Краткие содержания докл. 25-й науч. конф., (24 янв.–4 февр. 1967 г.) Л.: Ленингр. инж.-строит. ин-т, 1967. С. 5–10.
12. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
13. **Wilmes G.** On Riesz-type inequalities and K-functionals related to Riesz potentials in $\mathbb{R}^N$ // N. Numer. Funct. Anal. Optim. 1979. Vol. 1, no. 1. P. 57–77.

14. **Kozko A.I.** The exact constants in the Bernstein–Zygmund–Szegö inequalities with fractional derivatives and the Jackson–Nikolskii inequality for trigonometric polynomials // East J. Approx. 1998. Vol. 4, no. 3. P. 391–416.
15. **Arestov V.V., Glazyrina P.Yu.** Sharp integral inequalities for fractional derivatives of trigonometric polynomials // J. Approx. Theory. 2012. Vol. 164, no. 11. P. 1501–1512.
16. **Арестов В.В., Глазырина П.Ю.** Интегральные неравенства для алгебраических и тригонометрических полиномов // Докл. АН. 2012. Т. 422, № 6. С. 727–731.
17. **Arestov V.V.** S.N. Bernstein inequalities for algebraic and trigonometric polynomials // Докл. АН СССР. 1979. Т. 246, № 6. С. 1289–1292.
18. **Арестов В.В.** Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.
19. **Glazyrina P.Yu.** Necessary conditions for metrics in integral Bernstein-type inequalities // J. Approx. Theory. 2010. Vol. 162, no. 6. P. 1204–1210.
20. **Арестов В.В.** Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в L_0 // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 6. С. 10–26.
21. **Belinsky E.S., Liflyand E.R.** Approximation properties in L_p, $0 < p < 1$ // Funct. Approx. Comment. Math. 1993. Vol. 22. P. 189–199.
22. **Runovski K., Schmeisser H.-J.** On some extensions of Bernstein's inequality for trigonometric polynomials // Funct. Approx. Comment. Math. 2001. Vol. 29. P. 125–142.
23. **Леонтьева А.О.** Неравенство Бернштейна для производной нулевого порядка тригонометрических полиномов в L_0 // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 216–223.
24. **Тайков Л.В.** О сопряженных тригонометрических полиномах // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 110–114.
25. **Арестов В.В.** Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности // Мат. заметки. 1990. Т. 48, вып. 4. С. 7–18.
26. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа: в 2 т. М.: Наука, 1978. Т. 1. 392 с.; Т. 2. 432 с.
27. **Marden M.** Geometry of polynomials. Providence: AMS, 1966. 243 p. (Math. surveys, №3)
28. **De Bruijn N.G., Springer T.A.** On the zeros of composition-polynomials // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 1947. Vol. 50. P. 895–903 (= Indag. Math. 1947. Vol. 9. P. 406–414).
29. **De Bruijn N.G.** Inequalities concerning polynomials in the complex domain // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 1947. Vol. 50. P. 1265–1272 (= Indag. Math. 1947. Vol. 9. P. 591–598).
30. **Pólya G.** Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen // Math. Zeitschrift. 1918. Vol. 2, no. 3–4. S. 352–383.
31. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.

Поступила 16.09.2013

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Vitalii.Arestov@urfu.ru

Глазырина Полина Юрьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Институт математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Polina.Glazyrina@urfu.ru